Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 24/25

Aufgabenserie 6 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1*. Schokolade wird aus 4 Rohstoffen: Kakao, Kakaobutter, Zucker und Milch (R_1, R_2, R_3, R_4) hergestellt, die Mengen werden dabei in g angegeben. Im Produktionsprozess werden als Zwischenprodukte die Milch-, die Halbbitter- und die Bitterschokolade (Z_1, Z_2, Z_3) betrachtet. Die Firma stellt 5 Endprodukte E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 her: Tafeln Schokolade der 3 Schokoladesorten und 2 Sorten Pralinenmischungen. Sämtliche Mengenangaben der Zwischen- und Endprodukte beziehen sich auf jeweils 100g des jeweiligen Produktes. Bei der Produktion von einer Einheit Z_1 werden 14 Einheiten R_1, 20 Einheiten R_2, 48 Einheiten R_3 und 22 Einheiten R_4 benötigt. Bei der Produktion von einer Einheit Z_2 werden 32 Einheiten R_1, 13 Einheiten R_2, 48 Einheiten R_3 und 11 Einheiten R_4 benötigt. Bei der Produktion von einer Einheit Z_3 werden 48 Einheiten R_1, 4 Einheiten R_2 und 48 Einheiten R_3 benötigt. Im letzten Produktionsschritt geht eine Einheit Z_1 in eine Einheit E_1, eine Einheit Z_2 in eine Einheit E_2, eine Einheit Z_3 in eine Einheit E_3 über (das Gewicht der Verpackung wird vernachlässigt). Bei der Produktion von einer Einheit E_4 besteht ein Bedarf an 0.3 Einheiten Z_1, 0.4 Einheiten Z_2 und 0.3 Einheiten Z_3. Bei der Produktion von einer Einheit E_5 besteht ein Bedarf an 0.1 Einheiten Z_1, 0.3 Einheiten Z_2 und 0.6 Einheiten Z_3.
a) Bestimmen Sie die Verflechtungsmatrizen der beiden Teilschritte der Produktion und die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.
b) Berechnen den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von jeweils 2000 Tafeln (E_1, E_2, E_3), die 100g Schokolade enthalten, und von jeweils 1000 Pralinenschachteln (E_4 bzw. E_5), die 400g Schokolade enthalten.

2. Lösen Sie die jeweilige Matrizengleichung für $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ zunächst allgemein. Setzen Sie dann die konkreten Matrizen A, B, C ein und bestimmen die jeweilige konkrete Lösung X.
a)*

$$3XA + B = 2\,(X + XA)\,,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)*

$$3\,(B + X) + (AX^T)^T = -X\left(B + A^T\right) + 2X,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}.$$

c)*

$$A + XB^T - XC = -XB^T - 2I,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= -7 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 5, \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des Gleichungssystems

a)*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_4 &= 7 \end{aligned}$$

b)*

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 &= 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= -3, \end{aligned}$$

c)*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4, \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung jeweils in vektorieller Form an. Wie groß ist jeweils der Rang der

Koeffizientenmatrix?