

Aufgabenserie 7 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1*. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 2 \\2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 2 \\x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 6\end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an.

2. Ermitteln Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Rang der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der größtmögliche Rang einer 4×4 -Matrix?

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{1}{n^2}\right), & \text{b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{2n^4 + n^3 + 2}, & \text{c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^7 + 2}{3n^9 + n^2}, \\ \text{d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + \sqrt{n}}{3n^3 + \frac{2}{n}}, & \text{e)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 + 1}}{n + 2}, & \text{f)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(n^4 + n)}{n^5 - 2}, \\ \text{g)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

4. Ein Unternehmen besteht aus drei Zweigwerken. Jedes dieser Zweigwerke bietet ein

Produkt an, das sowohl für den Markt, aber auch für die jeweils zwei anderen Zweigwerke und den eigenen Bedarf produziert wird. Für das letzte Jahr werden die Produktströme in Mengeneinheiten durch die folgende Tabelle wiedergegeben:

Lieferung von ... an	Werk 1	Werk 2	Werk 3	Markt
Werk 1	50	130	270	50
Werk 2	200	130	270	50
Werk 3	50	130	45	225

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die produzierten Mengen in den einzelnen Werken gemäß dem Leontief-Modell, wenn die Input-Output-Beziehungen gemäß der Tabelle angewendet werden, die Verflechtung sich im Gleichgewicht befindet und die Mengenforderungen des Marktes an die Werke 90, 60 und 240 betragen.