Aufgabenserie GÜ1 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Gegeben sind die logischen Aussagen

$p:$ Die Eulersche Zahl e gehört zur Menge der gebrochenen Zahlen,

$q:$ Die Gleichung $x^3 = 1$ hat genau eine Lösung im Bereich der reellen Zahlen,

$r:$ Jedes Dreieck hat mindestens einen Winkel von $90°$,

$s:$ Die Ungleichung $x^2 > 1$ hat die Lösung $x > 1$.

Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagen p, q, r, s und der Aussage $(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (\bar{r} \vee s)$.

2. Geben Sie die Wahrheitstafel für den folgenden logischen Ausdruck an:

$$(p \vee q) \wedge \overline{(q \rightarrow r)}.$$

3. Gegeben sind die Mengen $A = \{x : x^2 \leq 4\}$, $B = [1,3]$, $C = [0,5)$, $D = (-1,0]$, $E = \{1, 2.5, -2\}$. Bestimmen Sie a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \cap C$, d) $A \backslash C$, e) $C \cup D$, f) $C \cap D$, g) $D \cap E$, h) $A \cup E$.

4. Ermitteln Sie alle reellen x, für die die Ungleichung

$$\textbf{a)}\quad |x-5|-1 \leq 3x, \quad \textbf{b)}\quad \frac{x^2-5}{x+2} < x,$$
$$\textbf{c)}\quad |2x-2| \leq x+8, \quad \textbf{d)}\quad \left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 3 \text{ gilt.}$$

5. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichungen:

$$\textbf{a)}\quad x^4 - 10x^2 = \frac{30x^2}{x-3}, \quad \textbf{b)}\quad 8 + \sqrt{x-1} = x+1,$$
$$\textbf{c)}\quad x^6 = \frac{x^2}{16}, \quad \textbf{d)}\quad 8y^{5/2} = \left(\frac{y^{11/6}}{y-1}\right)^3$$
$$\textbf{e)}\quad 4^{x+2} + 2^x = 2^{x+1}, \quad \textbf{f)}\quad \sqrt{t^5} = 8\sqrt{2} \cdot t^{-1}.$$

6. Vereinfachen Sie durch Auflösen der Klammern folgende Ausdrücke:

$$\text{a)}\quad (x-1)^2\,(x+3) - x^2\,(x+1)\,, \quad \text{b)}\quad (x+y+1)\left(x^2 - y^{-1}\right)$$

7. Klammern Sie die größtmögliche Potenz von x und y geeignet aus:

$$\text{a) } x^2y + 3xy^3, \text{ b) } \left(x^5y + (x + xy)^2\right)x^{-1}, \text{ c) } x^{17}y^3 + 3x^3y^5 - x^4y^6$$

Ggf. sind die Ausdrücke vorher zu vereinfachen.

8. Bestimmen Sie alle Paare reeller Zahlen x und y bzw. alle Tripel u, v, w, für die gilt:

a)
$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 7x - 5y &= 12, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u - 7w &= 11 \\ v - w &= 5 \\ 3u + v &= -6 \end{aligned}$$

9. Bestimmen Sie alle Lösungen x, y des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabenserie GÜ3 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind vorgegeben.

a) Berechnen Sie $\vec{d} = -2\vec{b} + 4\vec{c}$ und den Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{d}$ (in Grad- und Bogenmaß).

b) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen.

c) Berechnen Sie $\vec{c}^{\circ}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Die Punkte $P_1(0,0,0), P_2(3,0,4), P_3(4,3,1)$ und $P_4(0,5,2)$ seien die Eckpunkte eines Tetraeders. Berechnen Sie:

a) die Längen der Seiten $\overrightarrow{P_2P_3}$ und $\overrightarrow{P_2P_4}$,

b) den Winkel $\alpha = \angle P_3P_2P_4$,

c) das Volumen des Tetraeders und

d) die Oberfläche der Grundseite $\triangle P_1P_2P_3$.

e) Sind die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ und $\overrightarrow{P_2P_4}$ linear unabhängig? Bitte eine Begründung angeben!

3. Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie **a)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bzw. **b)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ auf lineare Unabhängigkeit. Bei Abhängigkeit ist die entsprechende Abhängigkeitsgleichung anzugeben.

4. Gegeben seien die Punkte $P_1(1,3,2)$, $P_2(5,1,5)$, $P_3(2,3,0)$, $P_4(4,0,-5)$, $P_5(1,4,1)$. Die Punkte P_1, P_2 liegen auf der Geraden g und die Punkte P_3, P_4, P_5 auf der Ebene E. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

5. Gegeben sind die Punkte $P_1(2,3,0)$, $P_2(3,4,1)$, $P_3(4,3,-1)$, die auf der Ebene E liegen. Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene E und der Punkt $P_4(6,-7,4)$ liegt auf dieser Geraden. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E, der gleichzeitig Fußpunkt des Lotes von P_4 auf die Ebene ist. Wie groß ist der Abstand zwischen P_4 auf die Ebene E?

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, $A+B$, $B+C$, $A+\vec{x}$, $2C$, C^T, AB und BA. Außerdem bestimme man, falls möglich, $A\vec{x}$, $\vec{x}A$, $\vec{x}^T A$, $\vec{x}^T\vec{x}$.

2. Für einen zweistufigen Produktionsprozess sind die jeweiligen Bedarfsgrößen an Roh- und Zwischenprodukten in den folgenden beiden Tabellen zusammengefasst:

	E_1	E_2
Z_1	1	2
Z_2	8	7
Z_3	1	4
Z_4	2	0

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	4	1	3	1
R_2	1	0	1	6

.

R_1, R_2 bezeichnen die Rohstoffe, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 die Zwischenprodukte und E_1, E_2 die Endprodukte.

a) Bestimmen Sie die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.

b) Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 30 Einheiten E_1 und 10 Einheiten E_2.

c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion der unter b) genannten Produktionsmenge für E_1 und E_2. Dabei sind für eine Einheit R_1 Kosten von 20 Euro und für eine Einheit R_2 von 30 Euro zu berücksichtigen.

d) Welche Mengen an E_1 und an E_2 können mit 552 ME R_1 und 276 ME R_2 produziert werden?

3. Ermitteln Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$XB - 2A = -4A$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$BX + A = \left(X^T A\right)^T + 2A$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie dabei zunächst die allgemeine Lösung ohne die speziellen Matrizen A und B einzusetzen.

5. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$IA + 2X = 5X + \left(BX^T\right)^T$$

erfüllt ist, wobei I die Einheitsmatrix ist und

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie dabei zunächst die allgemeine Lösung ohne die speziellen Matrizen A und B einzusetzen.

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= -10, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 14, \\ 6x_1 - 10x_2 - 12x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -3 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Geben Sie die Lösung in vektorieller Darstellung an.

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 7 \\ -4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= -10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 14 \\ 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 10x_5 &= 17 \end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= -10. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung jeweils in vektorieller Form an.

5. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^7}{2n^7+3n^2}, \quad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^6+1}{n^4\left(n-3n^{-1}\right)},$$
$$\text{c)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+3}}{n\left(1+4\sqrt{n}\right)}, \quad \text{d)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3\sqrt{n}}{2-5n^3},$$
$$\text{e)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n-1}\right)^n, \quad \text{f)} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{7n+3}.$$

6. Berechnen Sie den Summenwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 \cdot 3^n 5^{-n} + 6^{-n}\right)$$

Aufgabenserie GÜ9 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Bestimmen Sie von folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertebereich:

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \text{b)}\ f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$
$$\text{c)}\ f(x) = \frac{1}{1-\ln x}, \qquad \text{d)}\ f(x) = e^{-3x}.$$

Welche der Funktionen sind eineindeutig? Ermitteln Sie ggf. die Umkehrfunktion.

2. Bestimmen Sie Nullstellen, Lücken und Polstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3+8x^2+12x}{x^2+x-2}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Polynomdivision die Asymptote der Funktion.

3. Bestimmen Sie Nullstellen, Lücken und Polstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2-10x}{x^2-6x+8}$$

4. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\textbf{a)}\ f(x) = 5x^{1/3} - x^3e^x, \quad \textbf{b)}\ f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1}, \quad \textbf{c)}\ f(x) = x^2e^{1/x},$$
$$\textbf{d)}\ f(x) = \ln(\cos x), \quad \textbf{e)}\ f(x) = \sqrt{x^4+4}, \quad \textbf{f)}\ f(x) = \ln(x^2+x).$$

5. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)$$

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und die Wendepunkte der Funktion. Notieren Sie die Monotonieintervalle und die Intervalle, wo die Funktion konvex bzw. konkav ist.

6. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{e^x-1}, \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}, \quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x},$$
$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-2x}}{x}, \quad \textbf{e)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{\ln x}.$$

Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Regel von l'Hospital.

7. Auf dem Markt für Fahrzeuge mit Brennstoffzellenantrieb kann die Firma Hazwee ihre Pkw zum Preis von 5000GE je Produkteinheit absetzen (GE: Geldeinheiten). Die Kostenfunktion berechnet sich nach der Formel

$$K(x) = 0.3x^3 - 117\,x^2 + 15800x.$$

Der produzierte Output kann vollständig abgesetzt werden.
a) Bestimmen Sie die Gewinnzone.
b) Man ermittle das Produktionsvolumen, für das das Gewinnmaximum erreicht wird (die zweite Ableitung wird dazu nicht benötigt).
c) Bei welchem Output x arbeitet das Unternehmen im Betriebsoptimum, bei dem die Stückkosten minimal sind?

8. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = (x + \sqrt{x})e^{1/\sqrt{x}}.$$

hinsichtlich der Extremwerte und der Wendepunkte der Funktion.

9. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x + 4\ln(1-x)\,.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Extremstellen der Funktion $f(x)$. Für welche x ist die Funktion monoton wachsend und für welche monoton fallend? Wo liegen die Wendepunkte der Funktion?

1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^4y + xe^{-2x+y} + y\ln(x+2).$$

Für die Funktion $f(x,y)$ bestimme man die Tangentialebene im Punkt $(0,1)$. Geben Sie den Anstieg der Funktion im Punkt $P(0,1)$ in Richtung der x-Achse bzw. der y-Achse an. In welcher Richtung liegt der steilste Anstieg im Punkt P vor? Ermitteln Sie den Anstieg der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $P(0,1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. in Richtung $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2. Bestimmen Sie die Extremwerte (Art, Stelle, Funktionswert) der Funktion

$$\begin{aligned}
\text{a) } f(x,y) &= 4x^2 + y^2 + 3xy + x + 3y, \\
\text{b) } f(x,y) &= -2x^2y^5 - 2y^3 + 2x^2 - \frac{9}{2}y^2 + 6y, \\
\text{c) } f(x,y) &= -x^2y^2 - 2x^2 - 12\ln(y) - y^2 + 10y, \\
\text{d) } f(x,y) &= 6x^2y - 12x^2 + 9y^2 - 90y, \\
\text{e) } f(x,y) &= 3xy^2 + x^3 - 3y^2 - 3x^2, \\
\text{f) } f(x,y) &= -x^2y^2 + xy^2 + 4x^5 + 10x^2 - y^2.
\end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Integrale

a) $\int \left(x^3 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + \sin(x) \right) \mathrm{d}x,$ **b)** $\int e^{-2x} \mathrm{d}x,$

c) $\int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x,$ **d)** $\int \frac{1}{x}\sqrt{\ln x + 1}\mathrm{d}x,$

e) $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x,$ **f)** $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$ **g)** $\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x,$

h) $\int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x,$ **i)** $\int_2^3 \frac{x}{(x^2-3)^3}\,\mathrm{d}x,$ **j)** $\int x^4 \cos\left(x^5+2\right)\,\mathrm{d}x,$

k) $\int \frac{(2+\ln x)^5}{x}\,\mathrm{d}x,$ **l)** $\int \left(2x^3+x\right) e^{x^4+x^2}\mathrm{d}x,$

m) $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,\mathrm{d}x,$ **n)** $\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x,$

o) $\int \frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x,$ **p)** $\int_2^3 \left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)\mathrm{d}x.$

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Kurven $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4x - 3$. Bestimmen Sie zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen. Betrachten Sie dann die beiden Funktionen zwischen den beiden Schnittpunkten.

3. Für die Nachfragefunktion

$$p_N(x) = 18 - 0.1x^2$$

und die Angebotsfunktion

$$p_A(x) = 0.5x + 3$$

ermittle man die Höhe der Konsumentenrente und der Produzentenrente im Marktgleichgewicht.