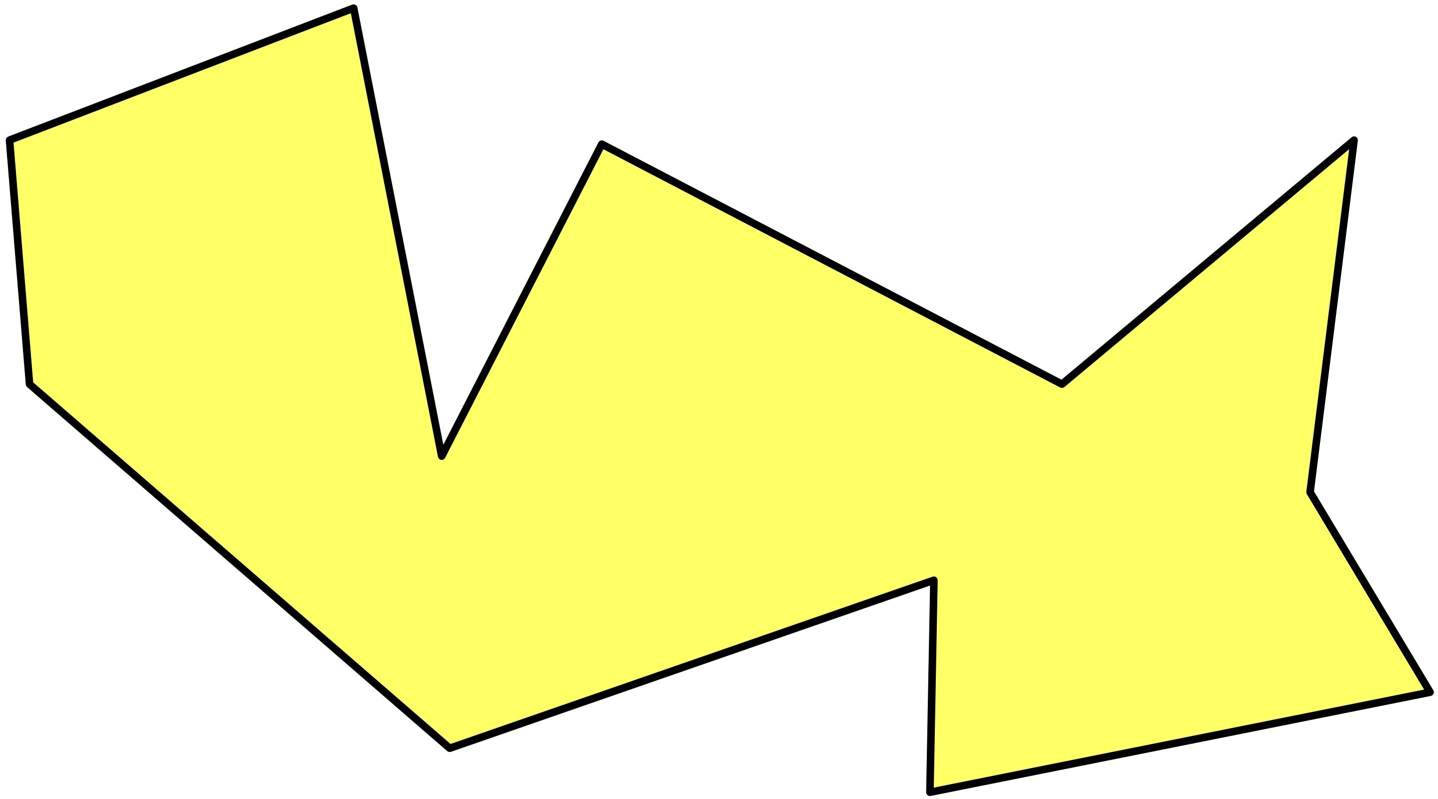
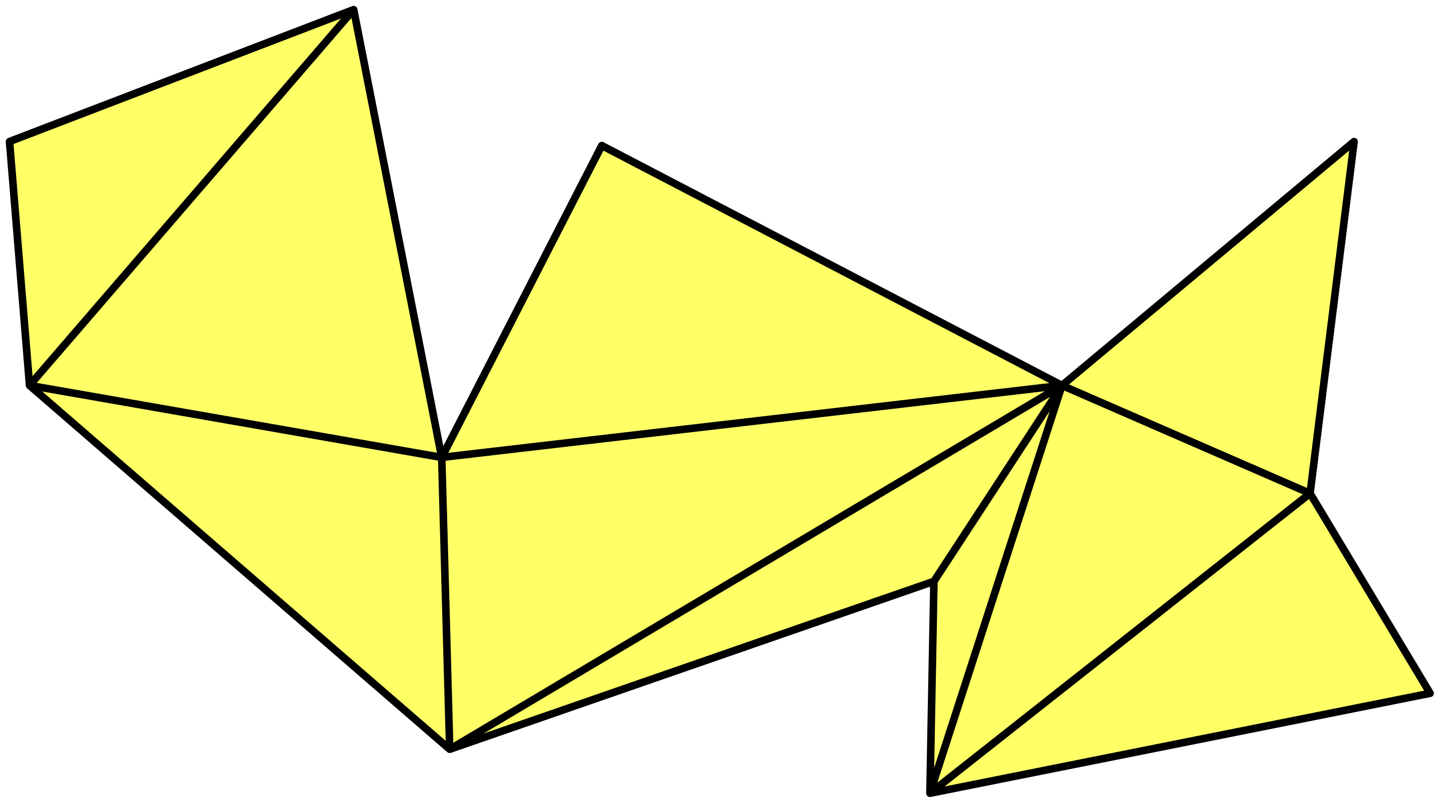
Triangulation von Polygonen

1. Beschreibung der Aufgabenstellung

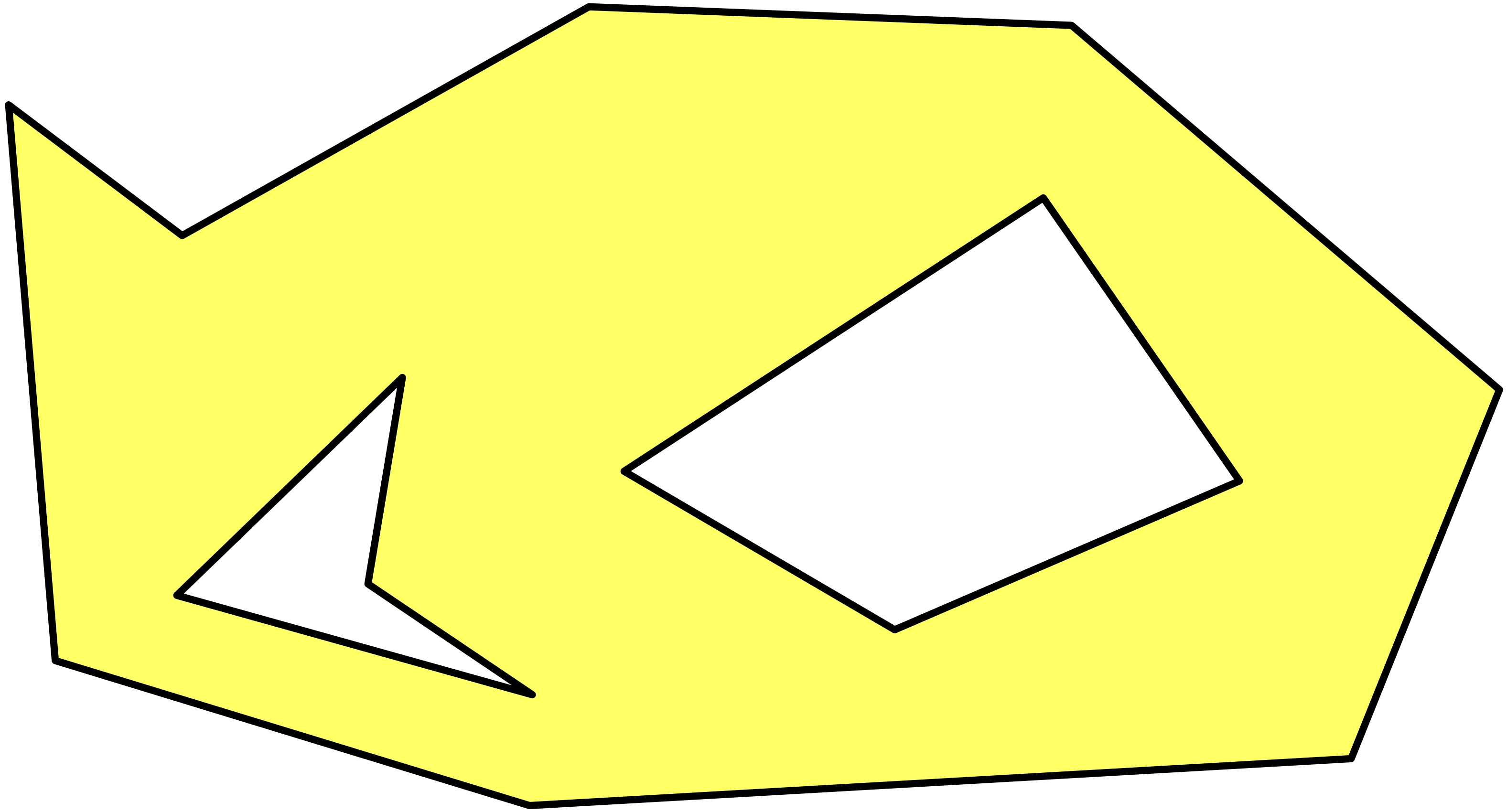
Einfache Polygone



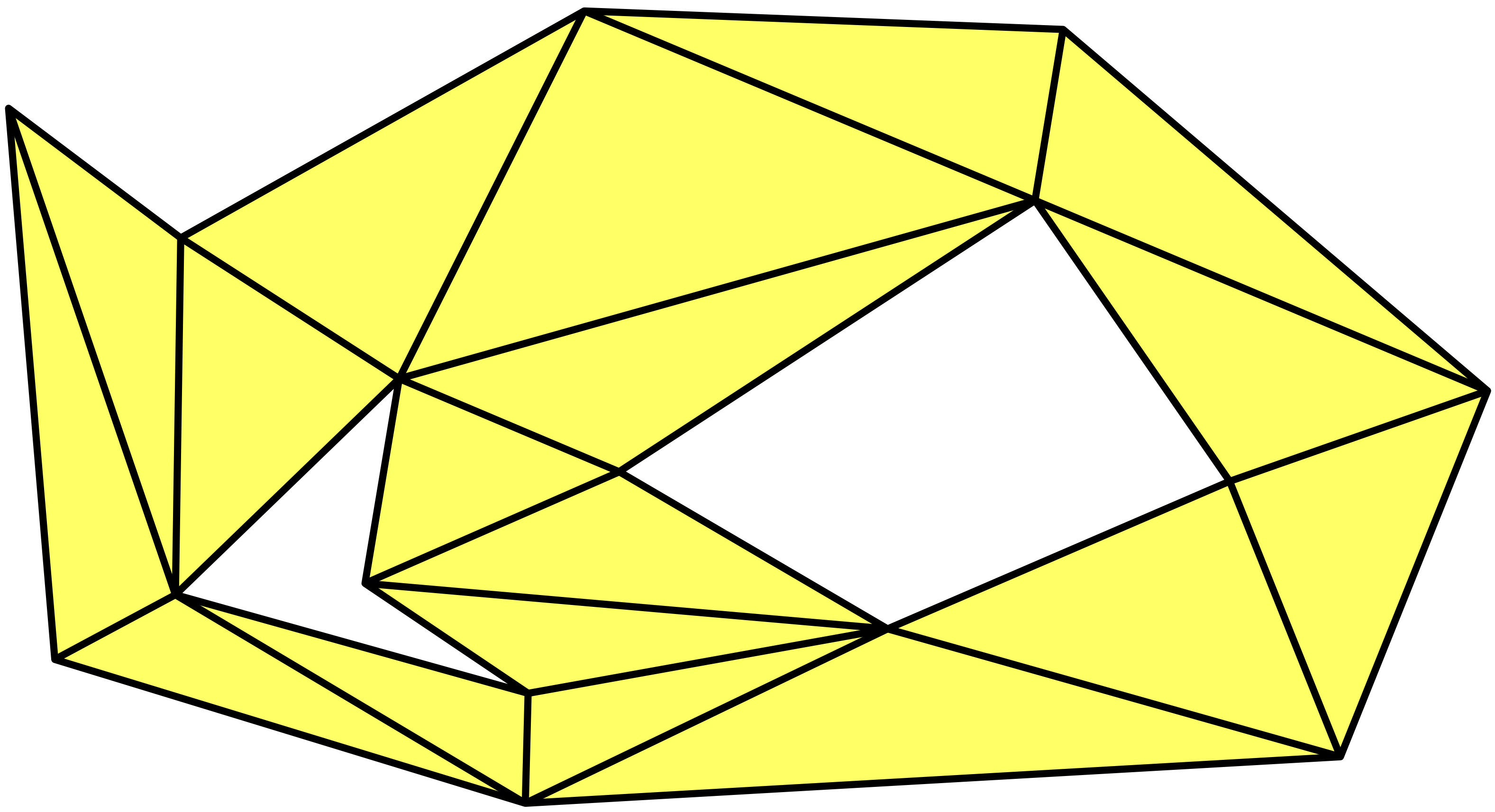
Einfügen von Diagonalen



Polygone mit Löchern



Einfügen von Diagonalen

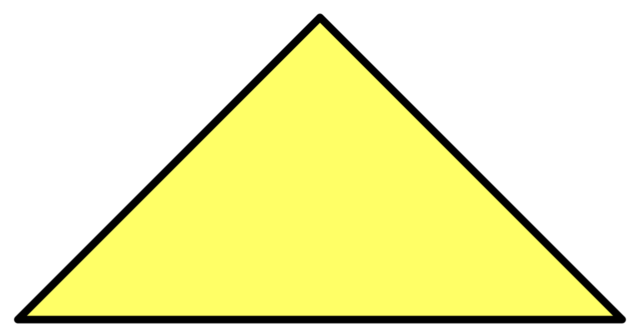


2. Existenz einer Triangulation

Behauptung: Jedes Polygon lässt sich triangulieren.

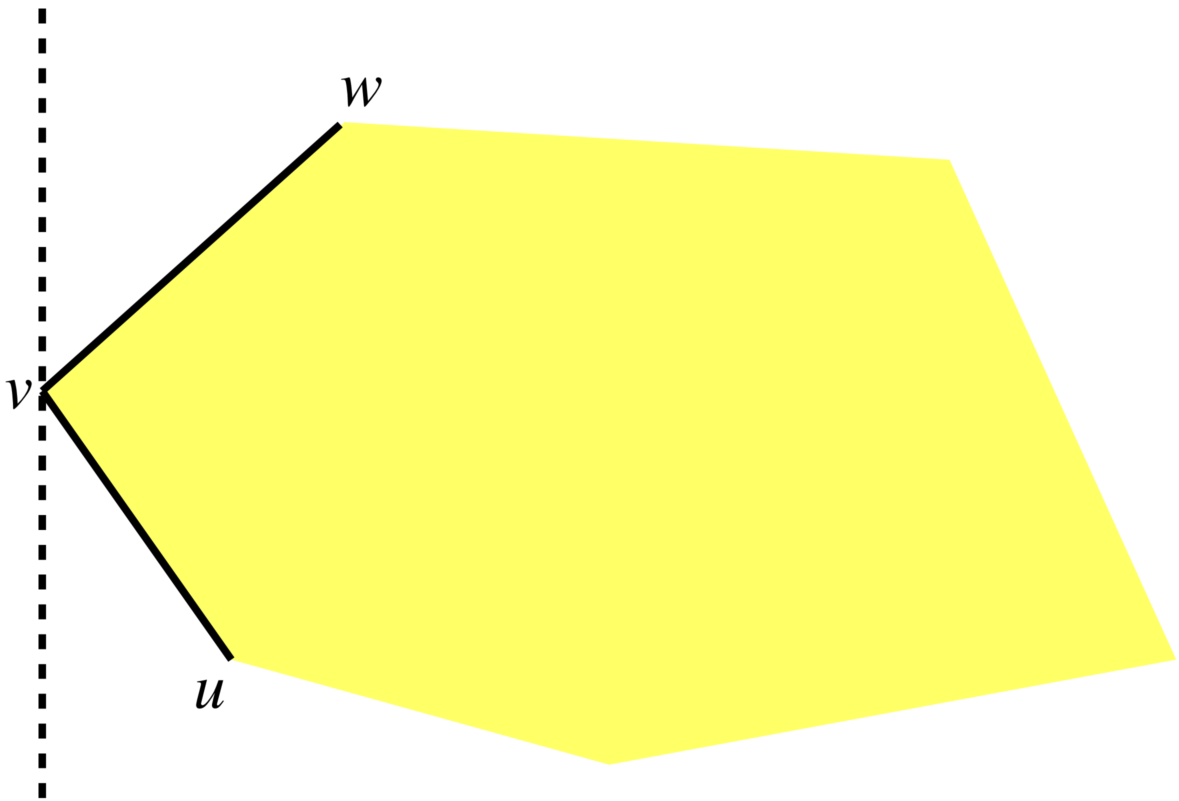
Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Anzahl der Eckpunkte n und Anzahl der Löcher h.

Induktionsanfang: $n = 3$ und $h = 0$

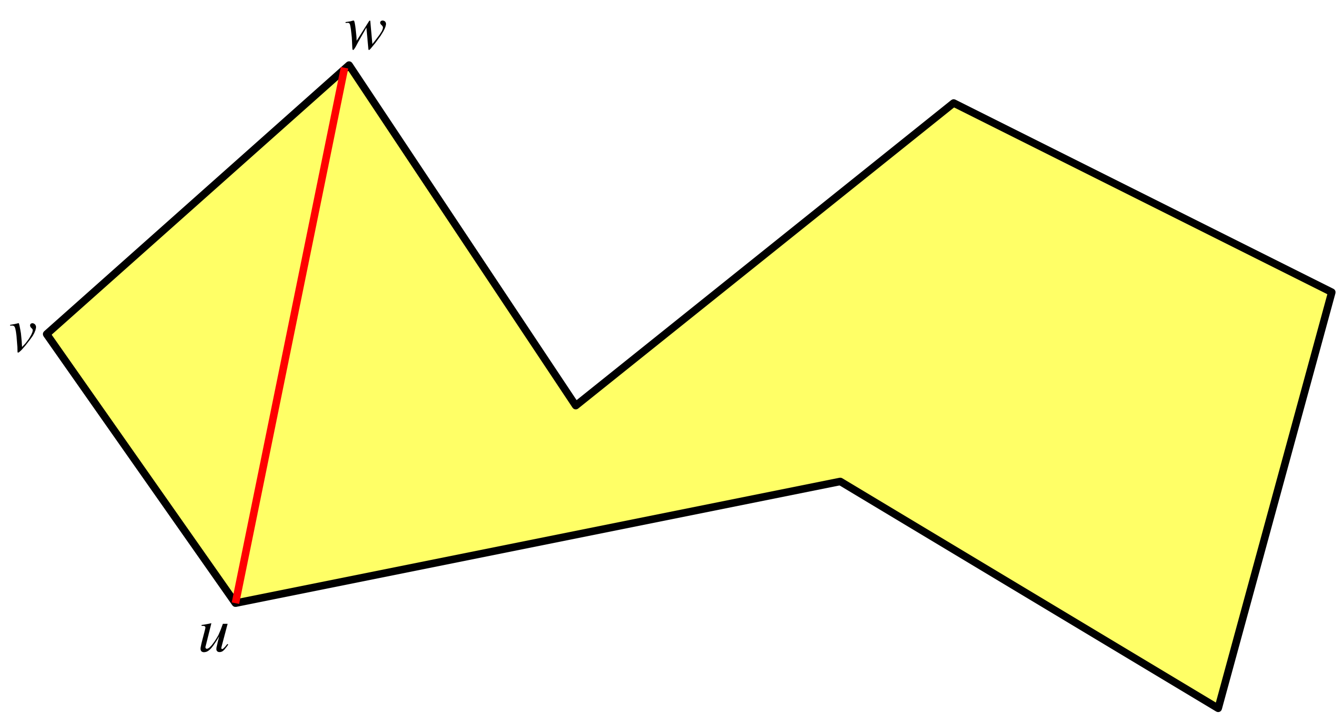


Induktionsschritt:

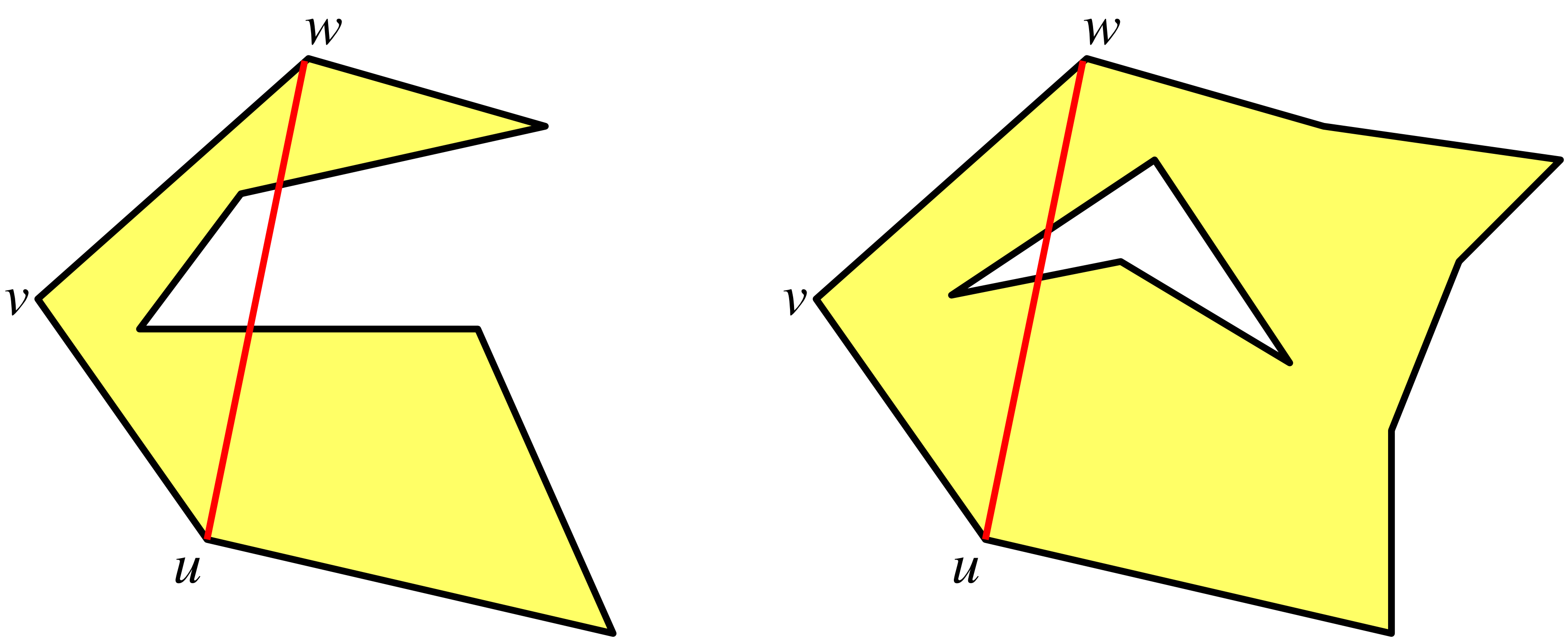
Wir bestimmen die Ecke v mit der kleinsten x-Koordinate und deren Vorgänger u und Nachfolger w auf dem Rand des Polygons.



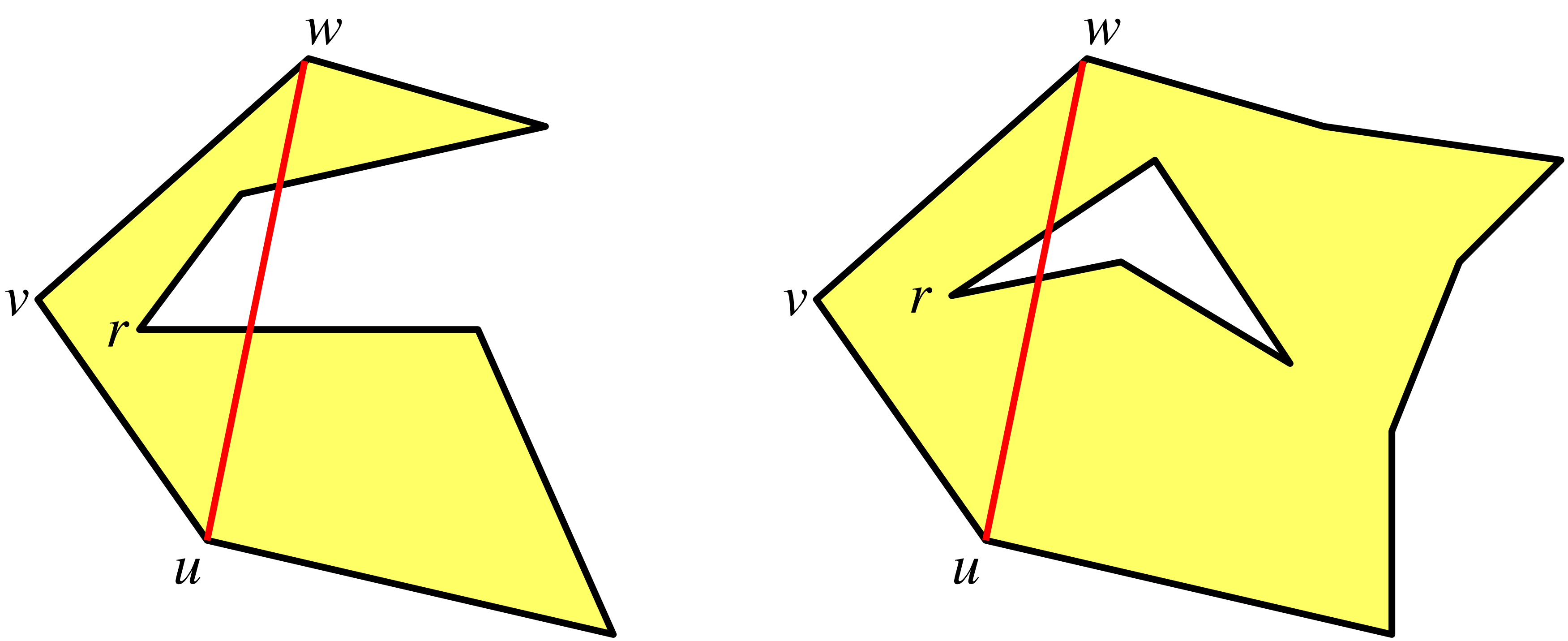
1. Fall: Die Strecke zwischen u und w verläuft innerhalb des Polygons.



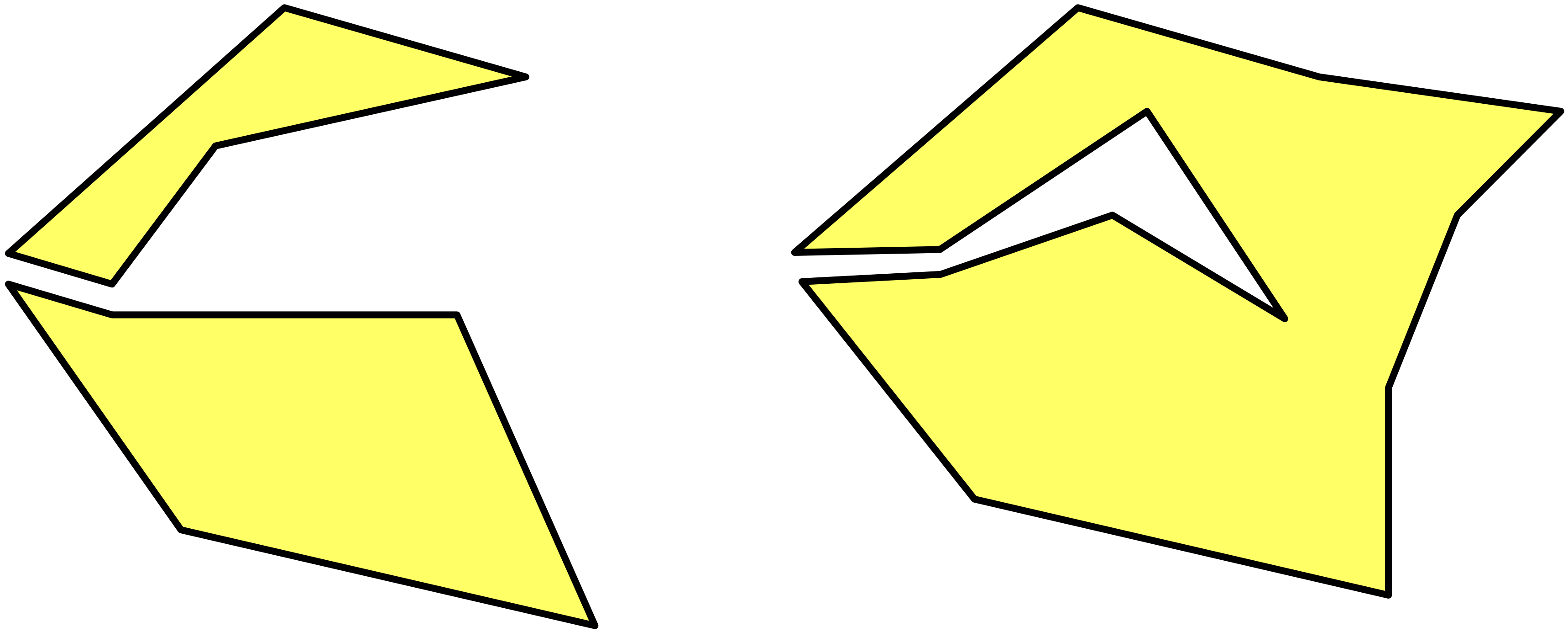
2. Fall: Die Strecke zwischen u und w verläuft nicht innerhalb des Polygons.



Wir bestimmen die Ecke r im Inneren des Dreiecks uvw mit kleinster x-Koordinate.



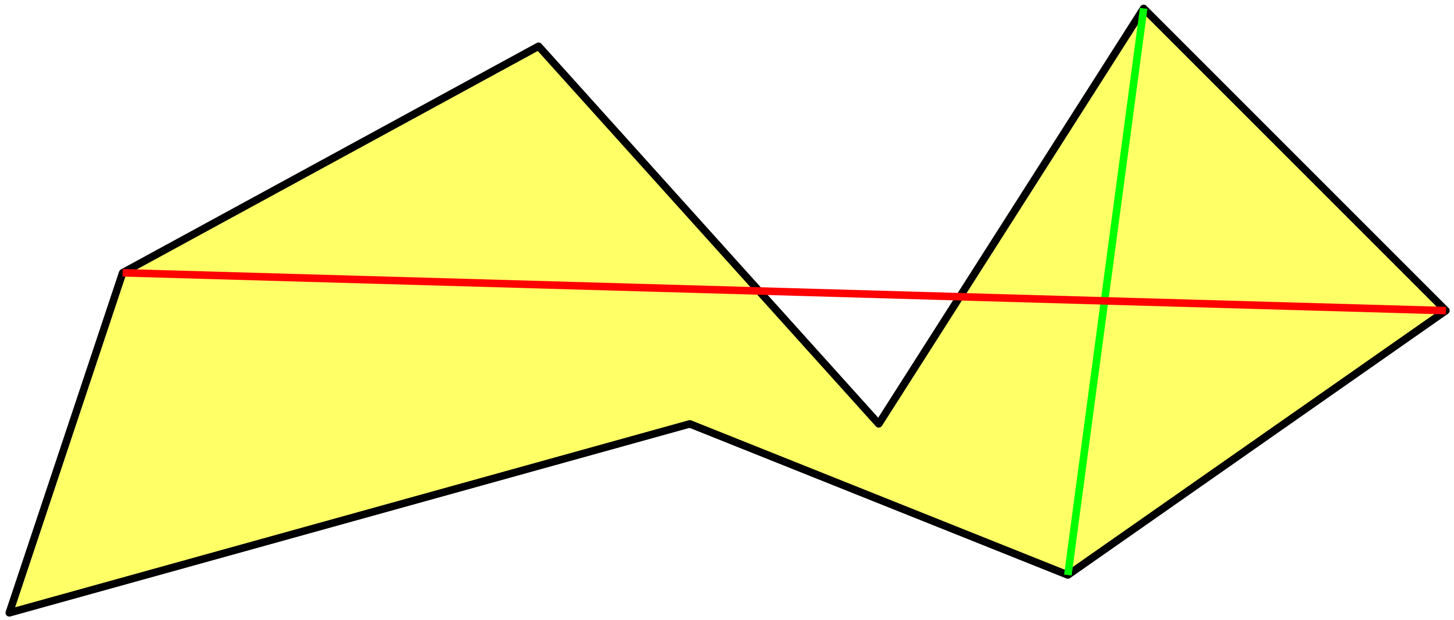
Wir zerlegen das Polygon entlang der Diagonale vr.



3. Effiziente Berechnung einer Triangulation

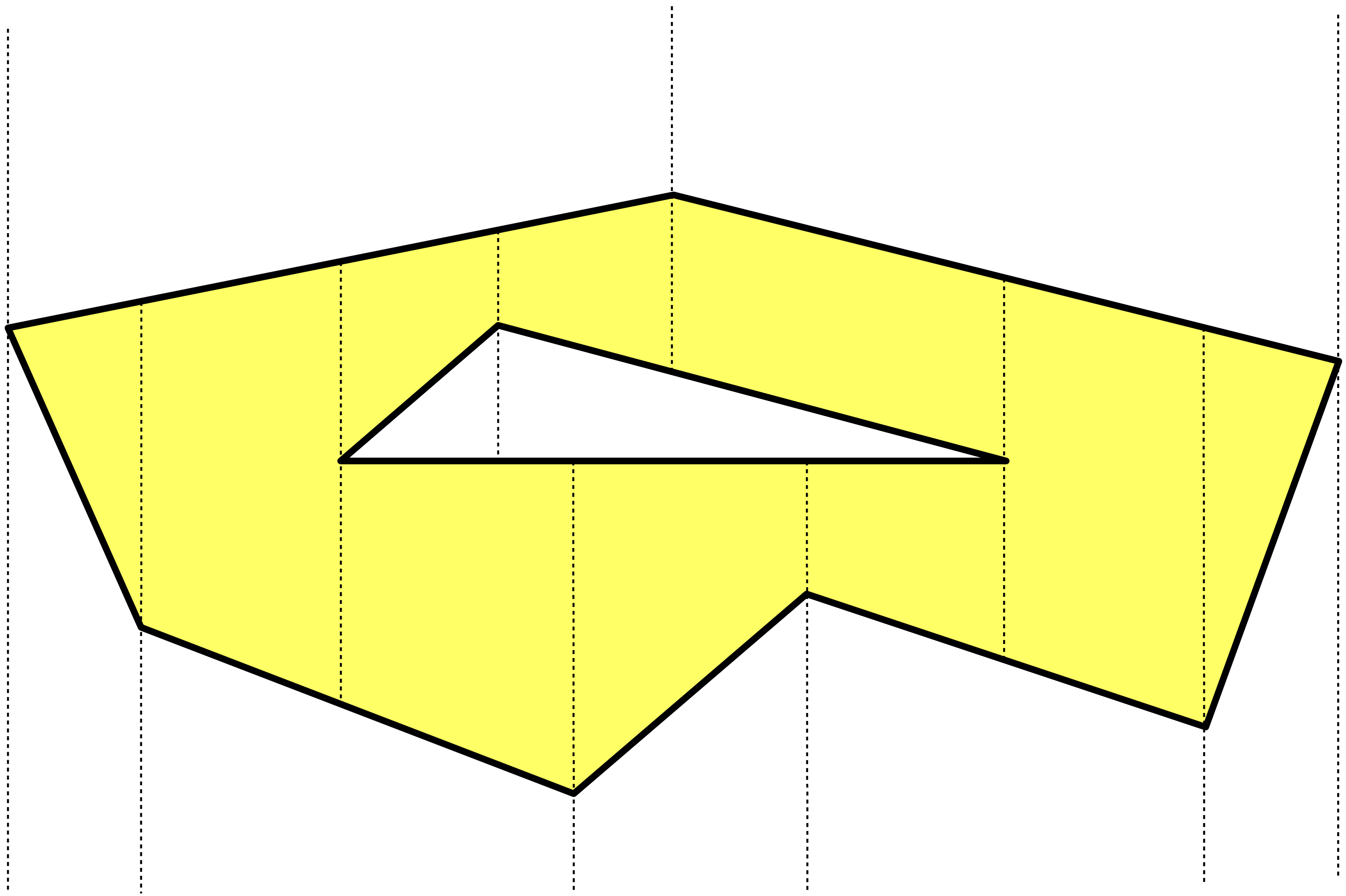
Ausgangspunkt

Beim Triangulieren geht es offenbar darum, möglichst effizient Diagonalen im Polygon zu finden.

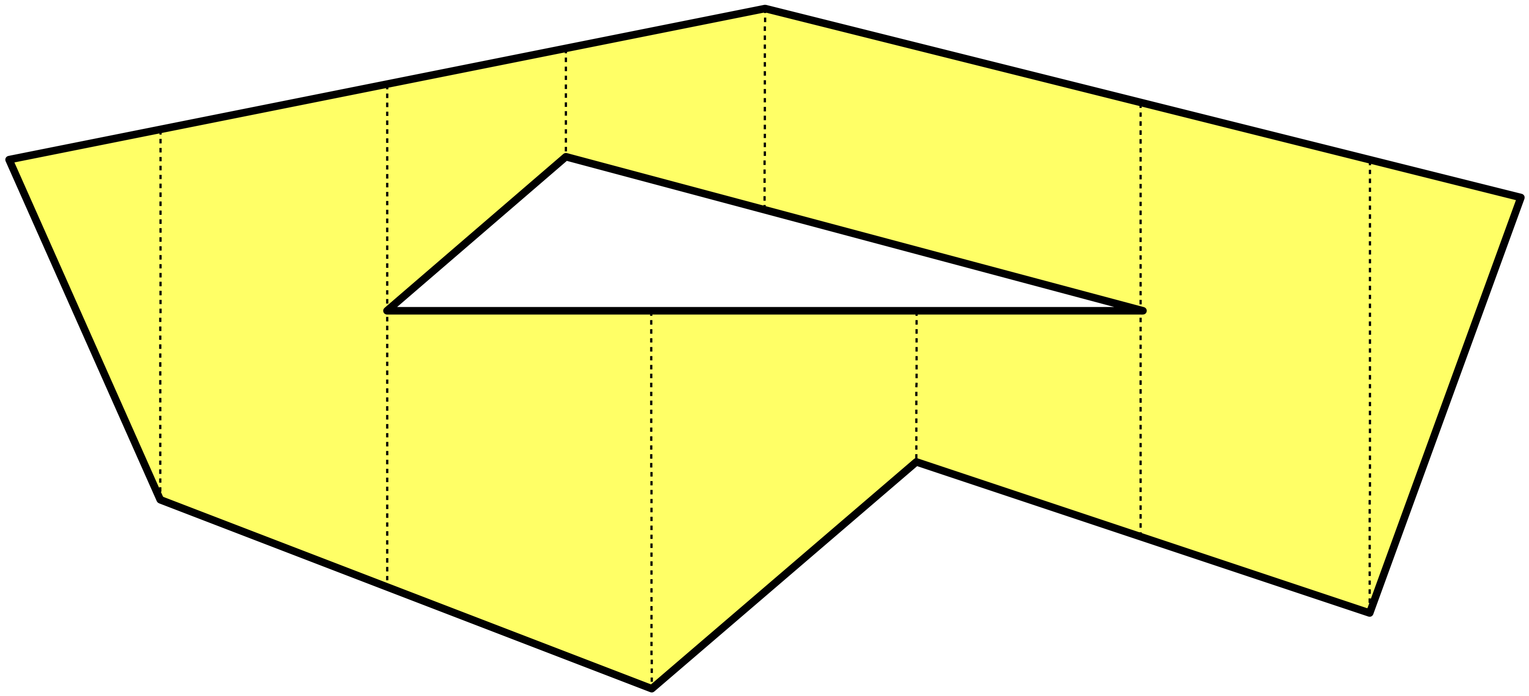


Ansatz zum Finden von Diagonalen

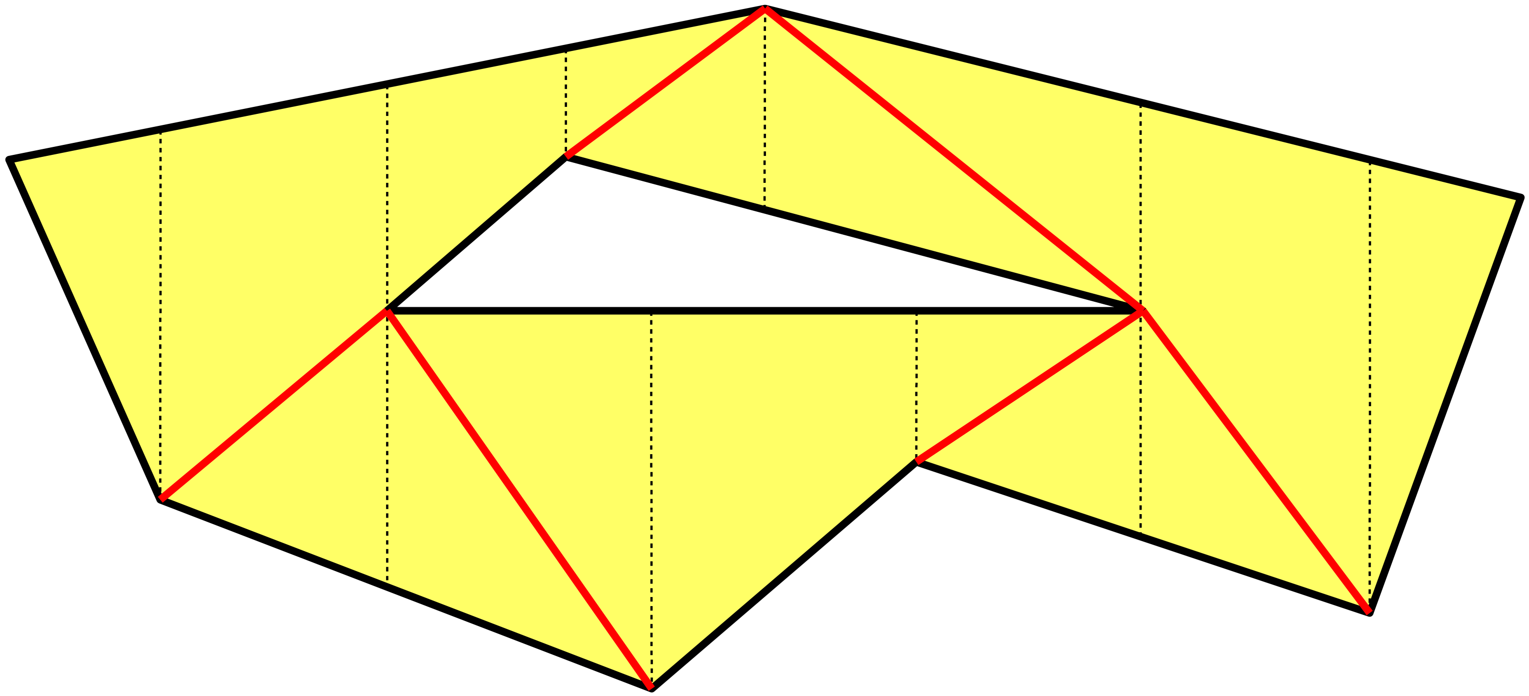
Wir betrachten die Trapezzerlegung für die Kanten des Polygons.



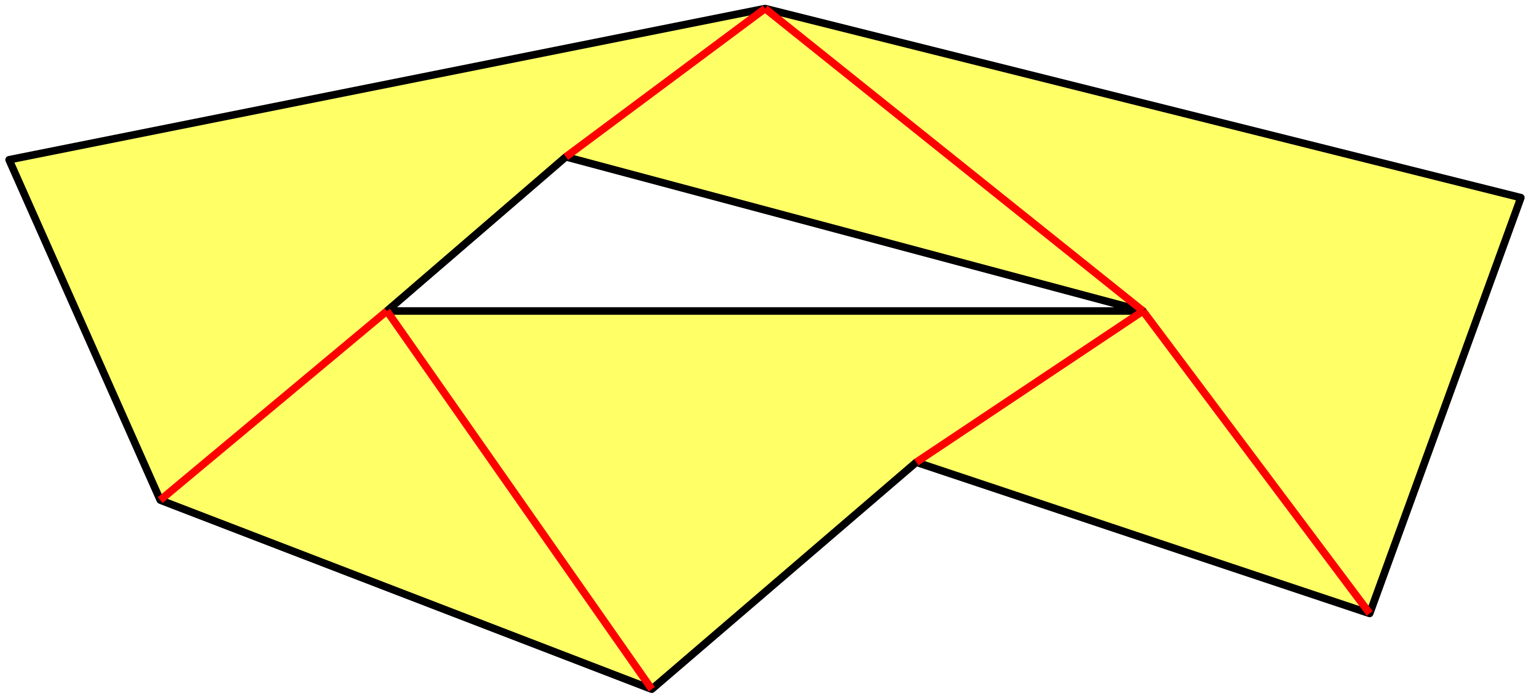
Alle Trapeze außerhalb des Polygons werden entfernt.



Wir gehen die verbleibenden Trapeze durch und fügen wo immer möglich Diagonalen ein.

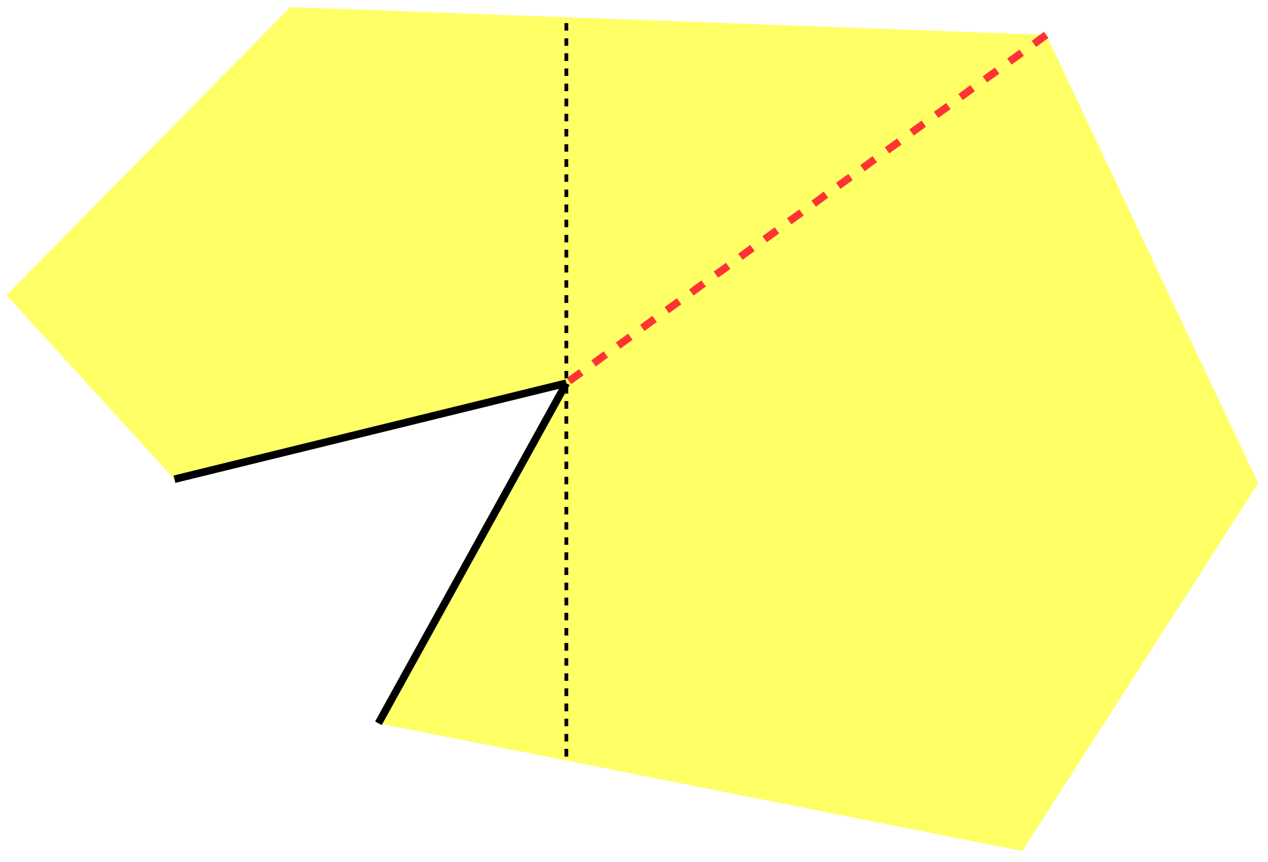


Die so erhaltenen Teilpolygone haben scheinbar alle die Eigenschaft, dass der Schnitt mit jeder senkrechten Geraden eine Strecke, ein Punkt oder leer ist. Man nennt solche Polygone <u>*x*-monoton</u>.



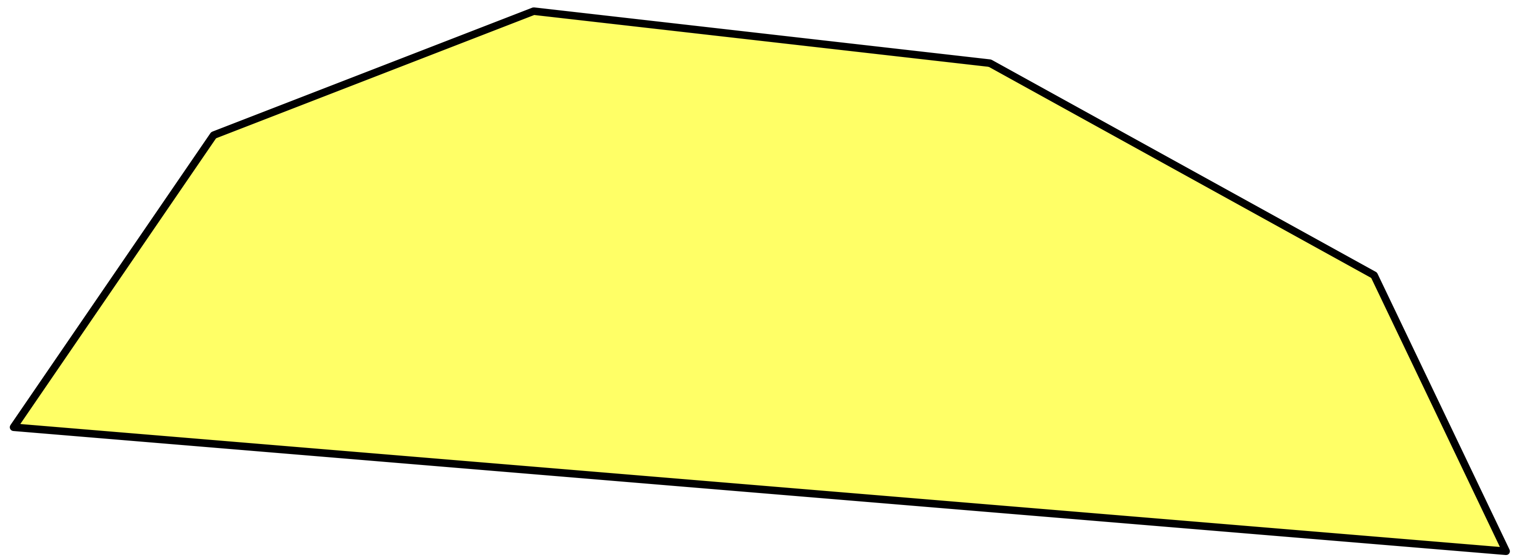
Plausibilisierung der beobachteten Eigenschaft

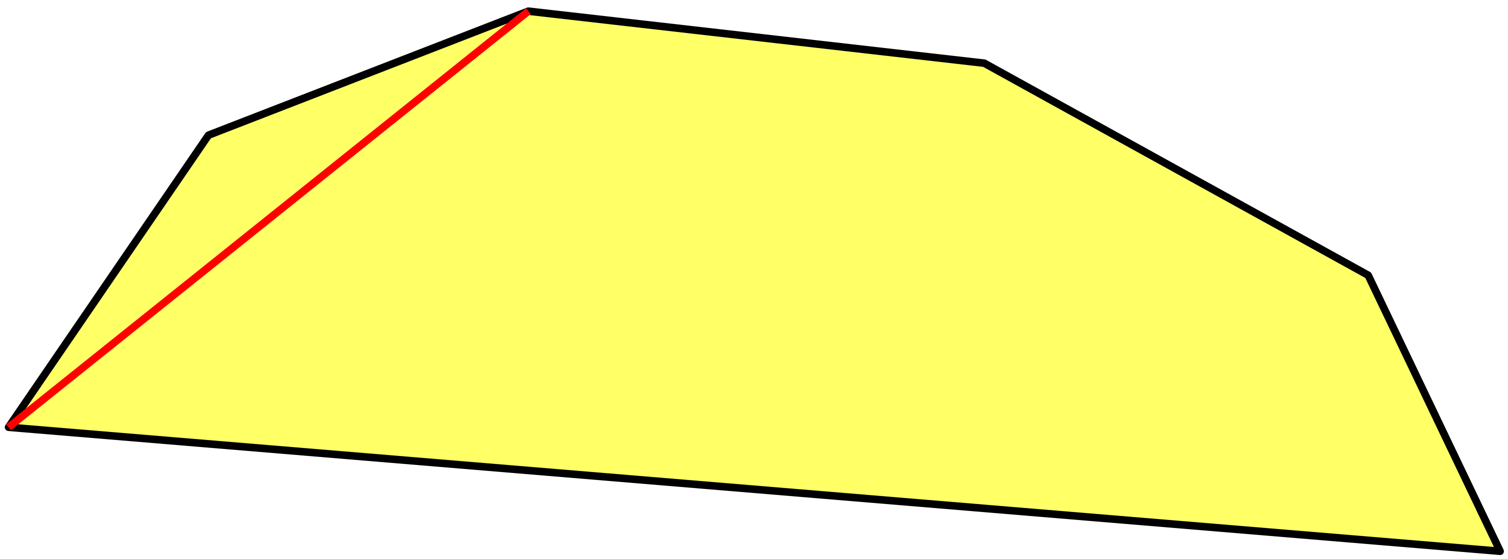
Angenommen ein Teilpolygon wäre nicht x-monoton.

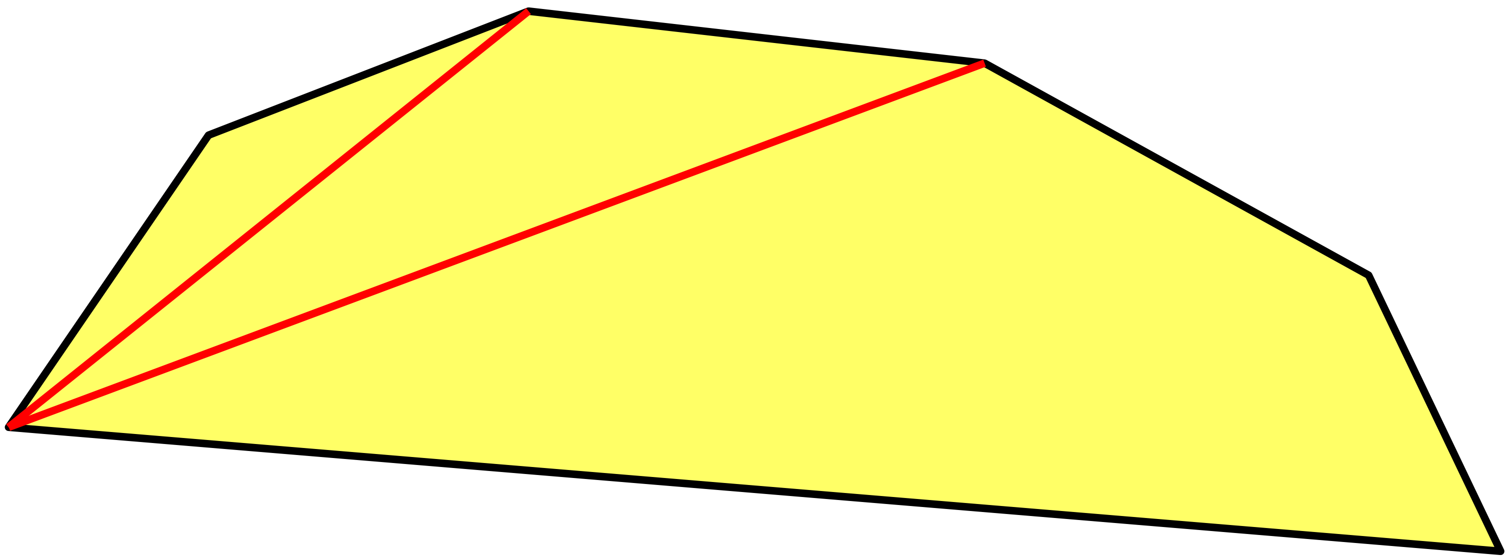


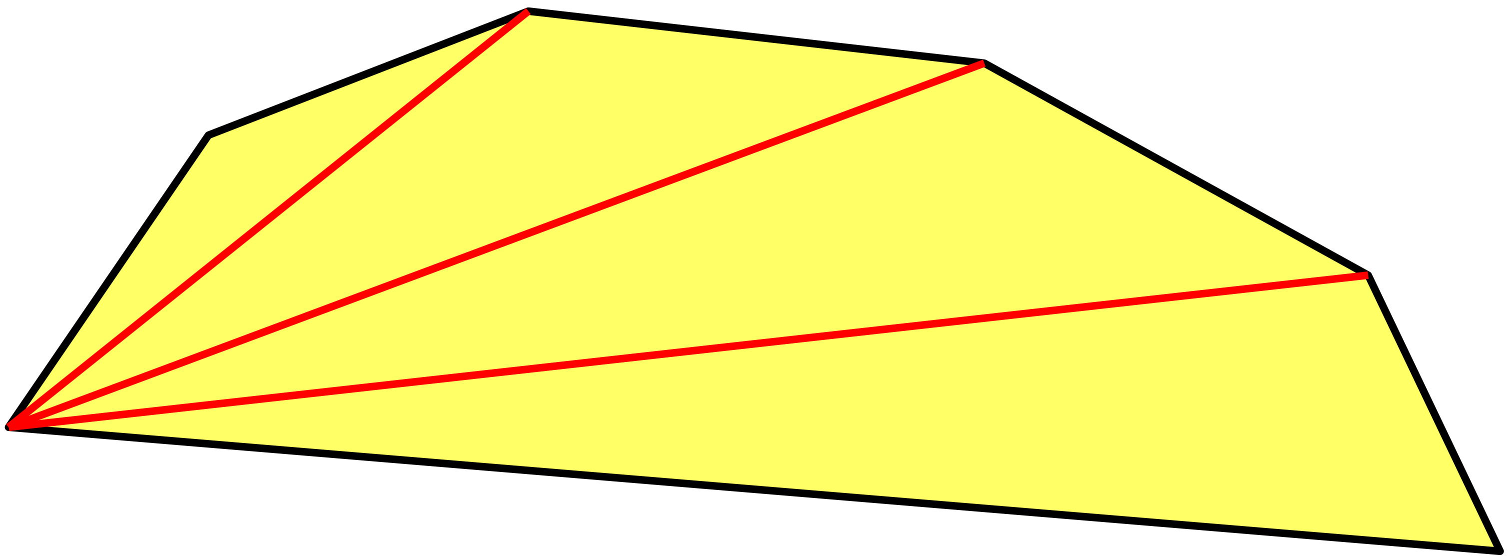
4. Triangulation von x-monotonen Polygonen

Wenn das Polygon schon x-monoton ist, dann liegt es nahe, die Ecken nach wachsenden x-Koordinaten abzuarbeiten.

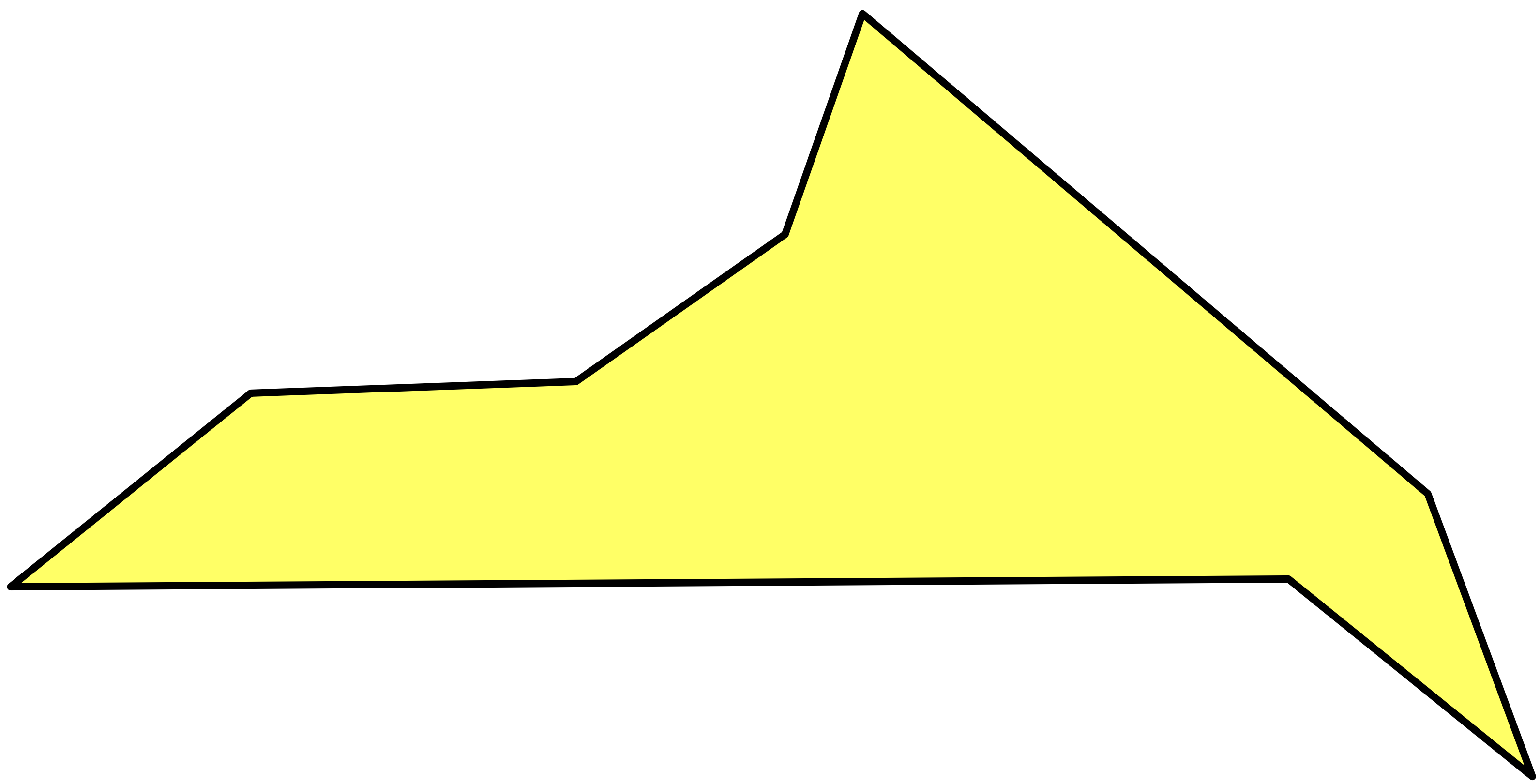


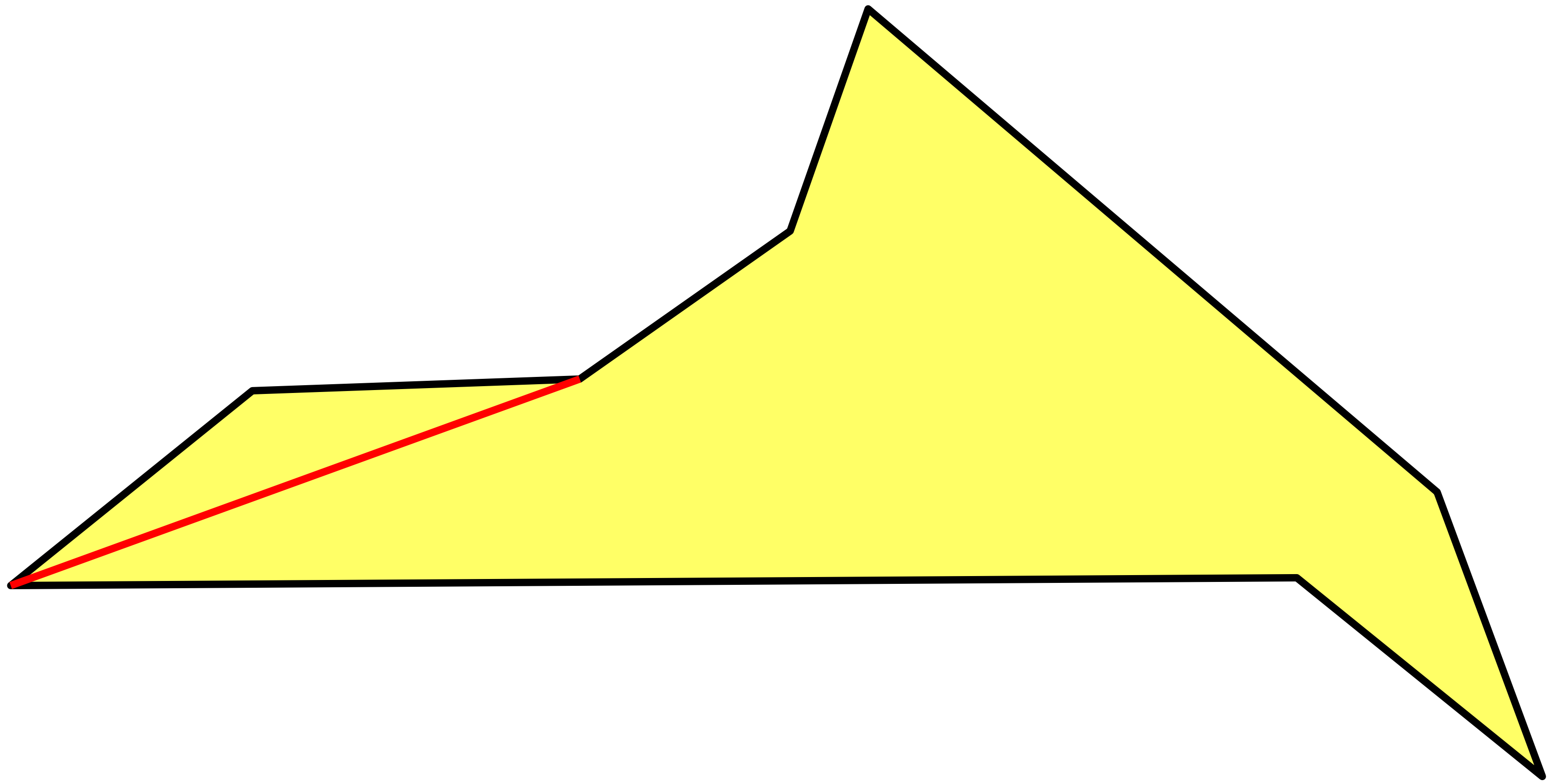




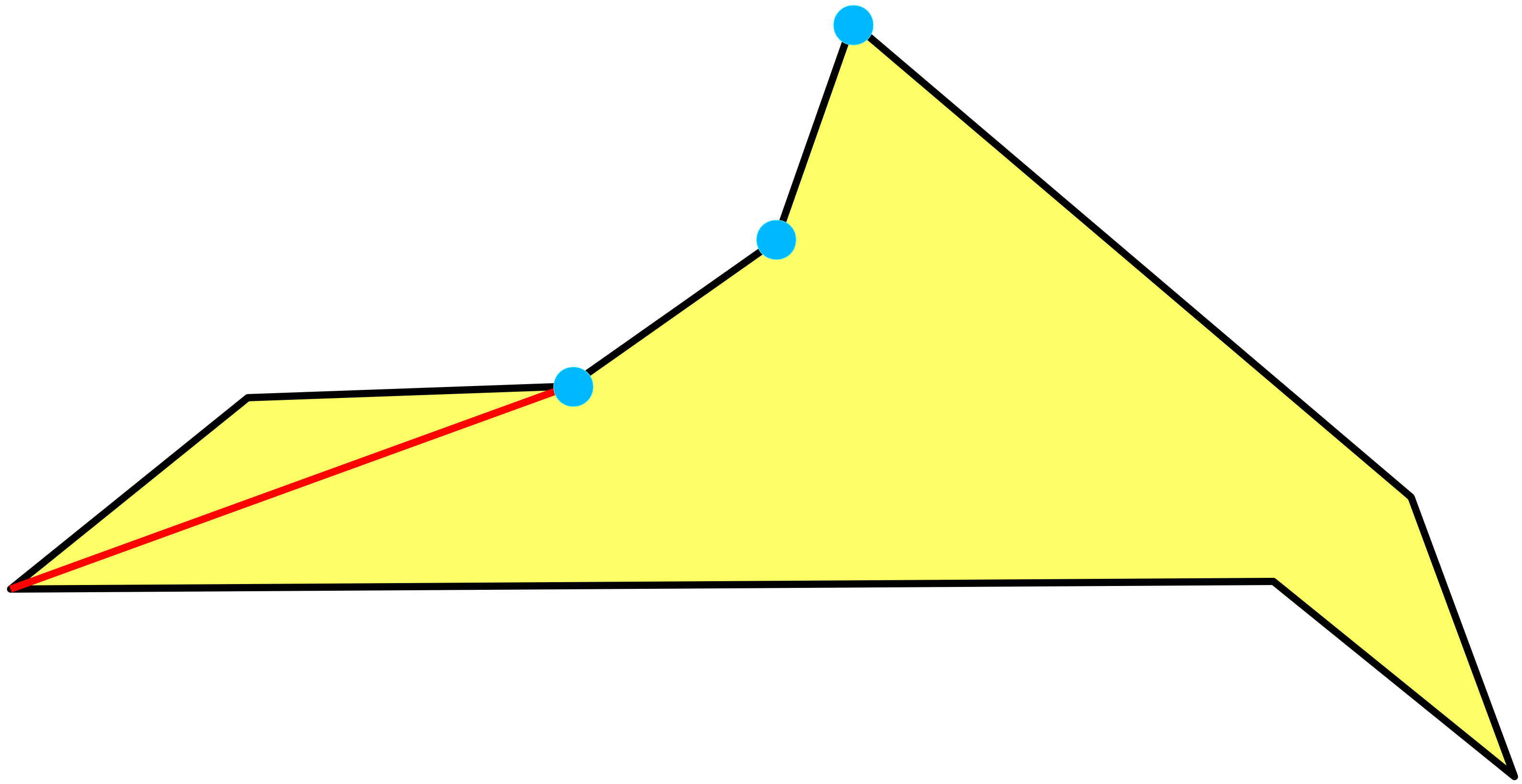


Leider lässt sich nicht jede Ecke sofort verarbeiten. Deshalb verwenden wir einen Stapel (Stack) zur Verwaltung dieser aufgeschobenen Ecken.

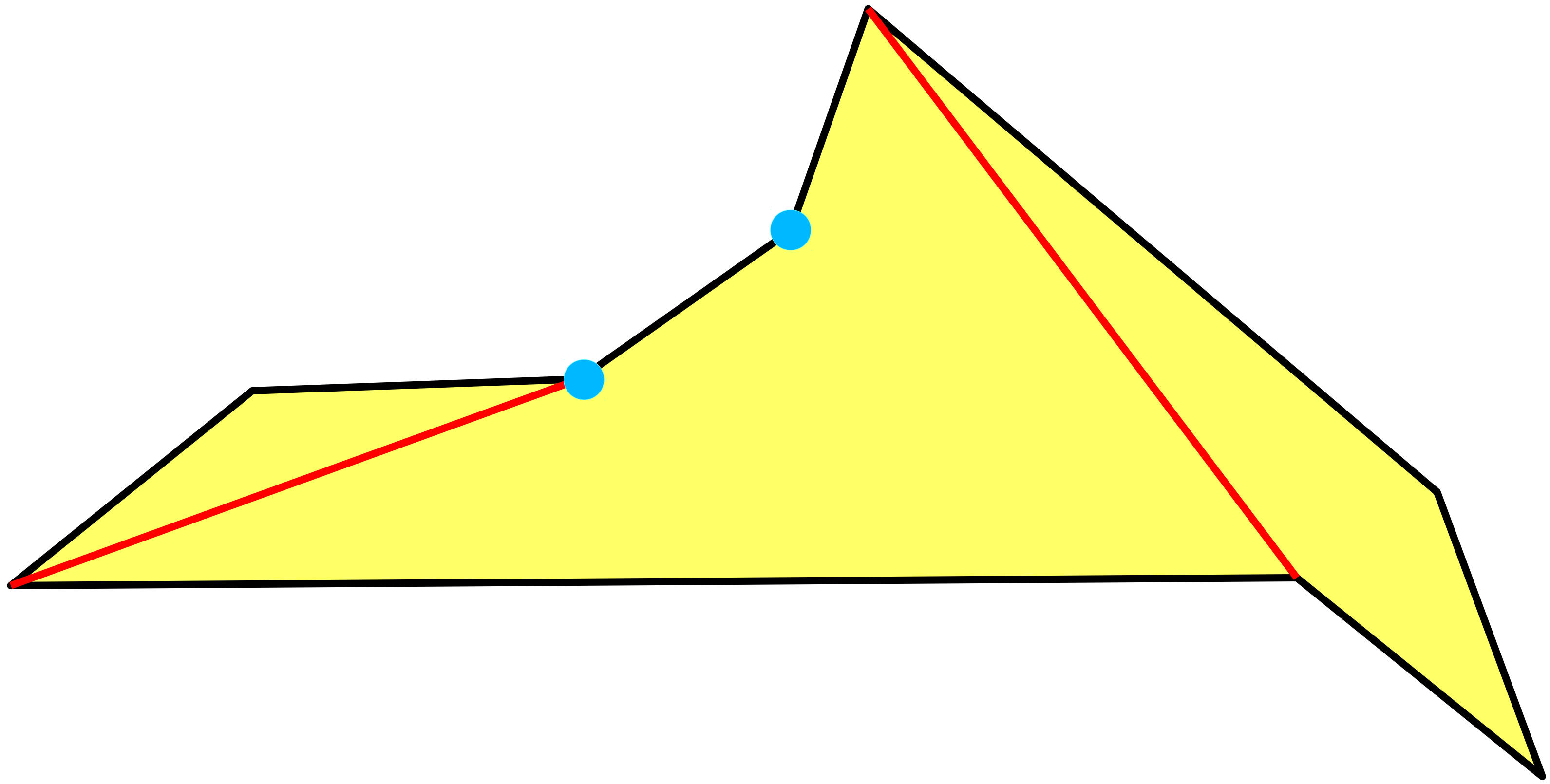




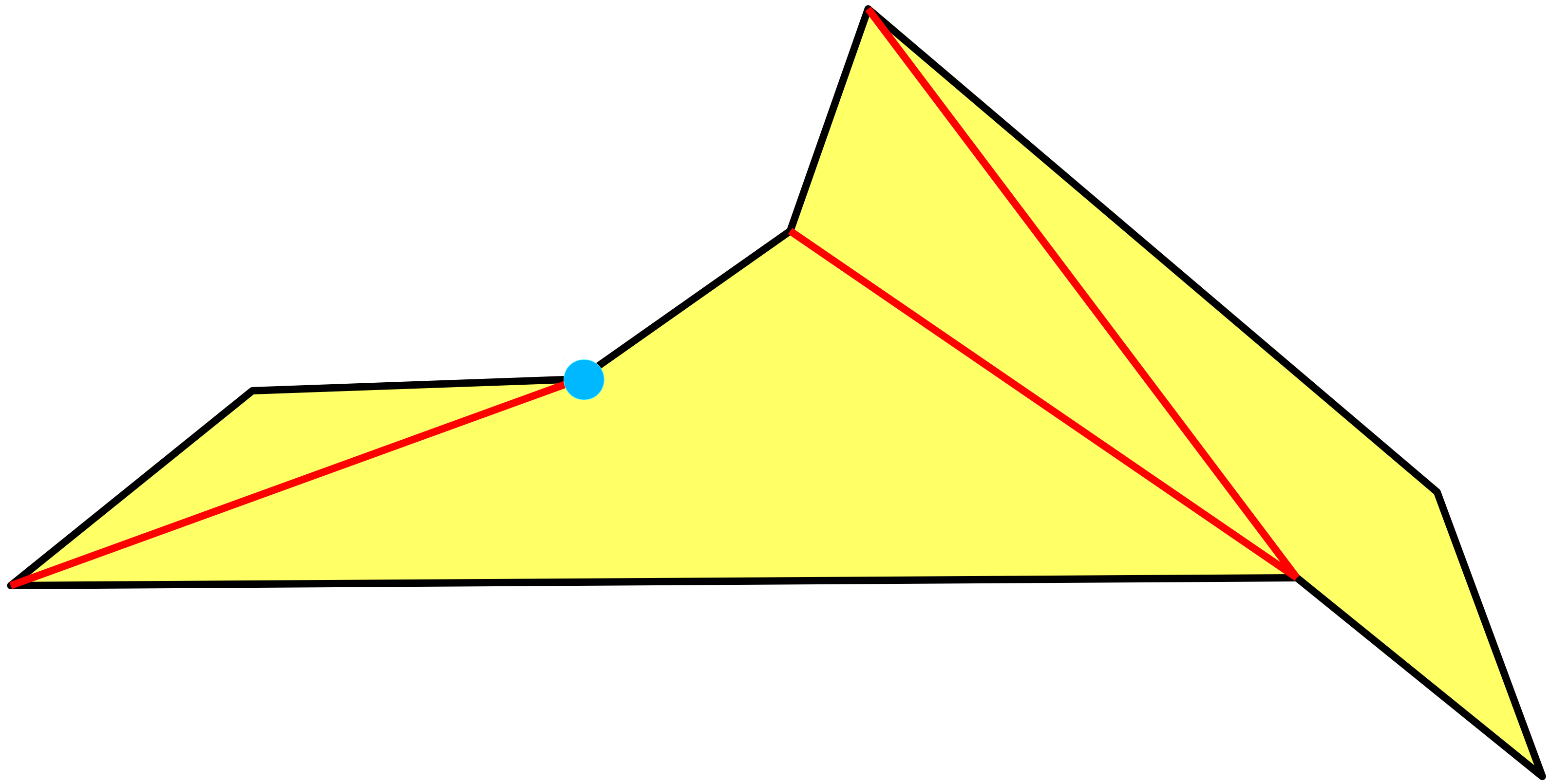
Punkte auf dem Stapel

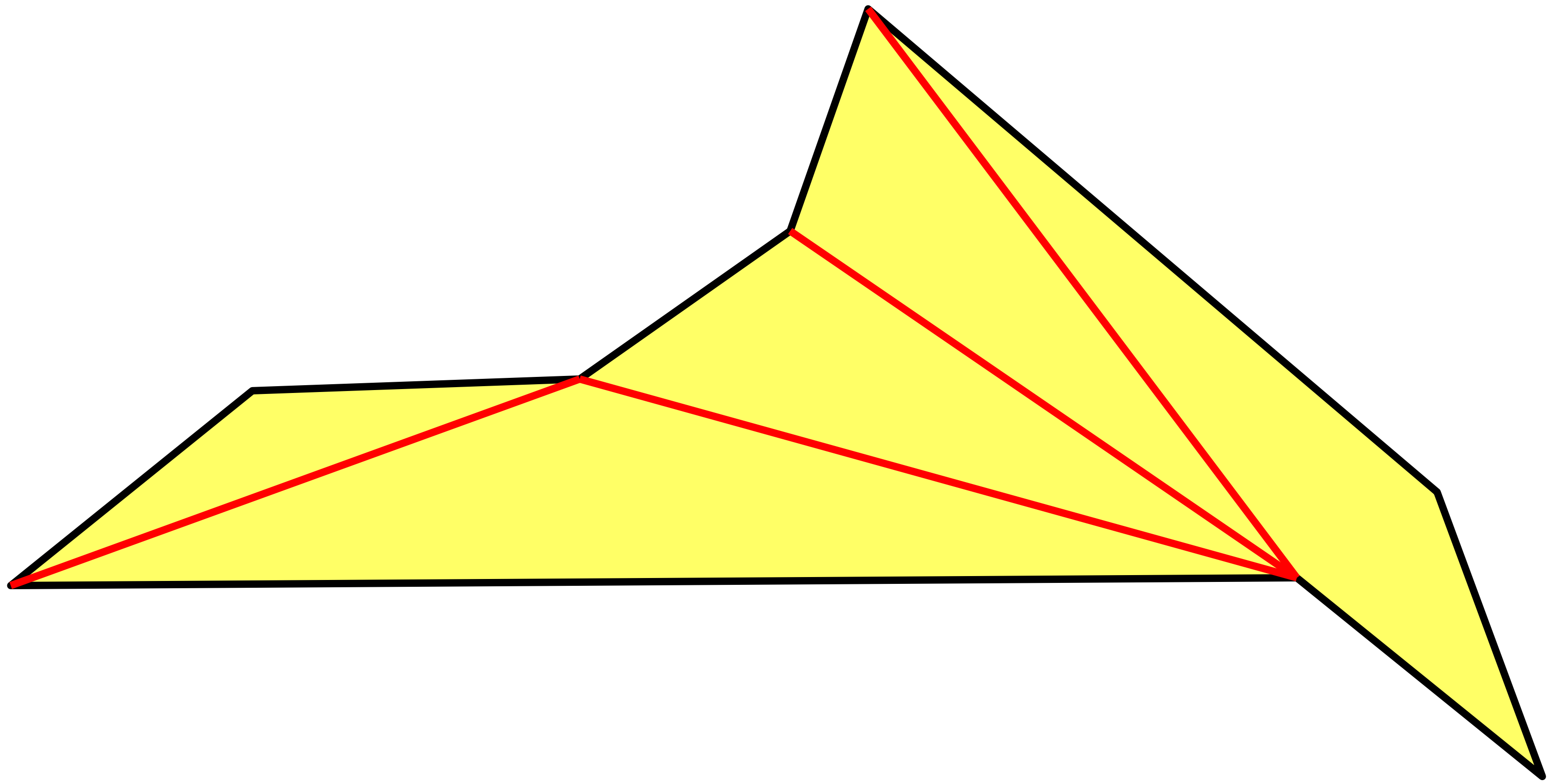


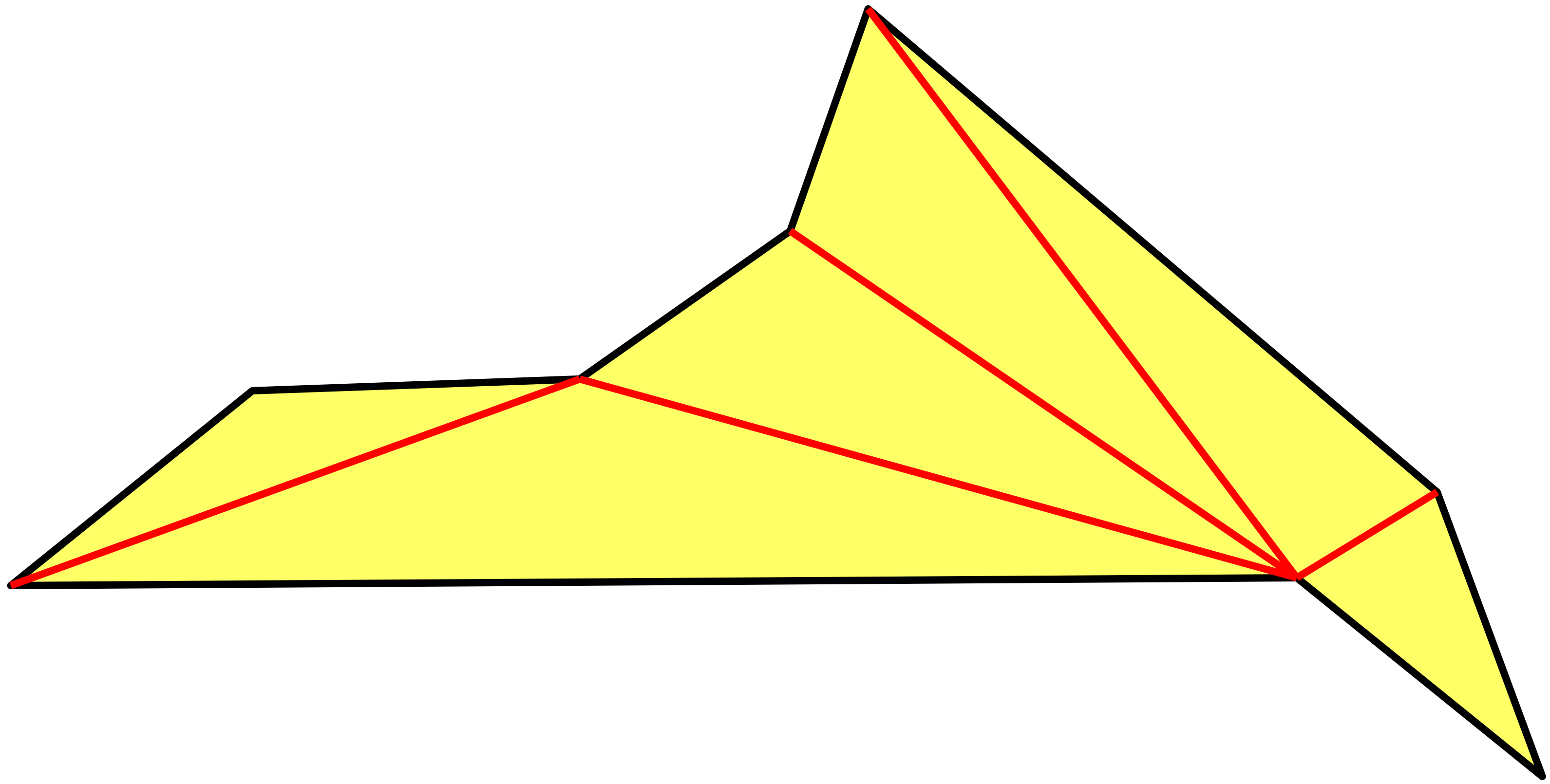
- Punkte auf dem Stapel



- Punkte auf dem Stapel



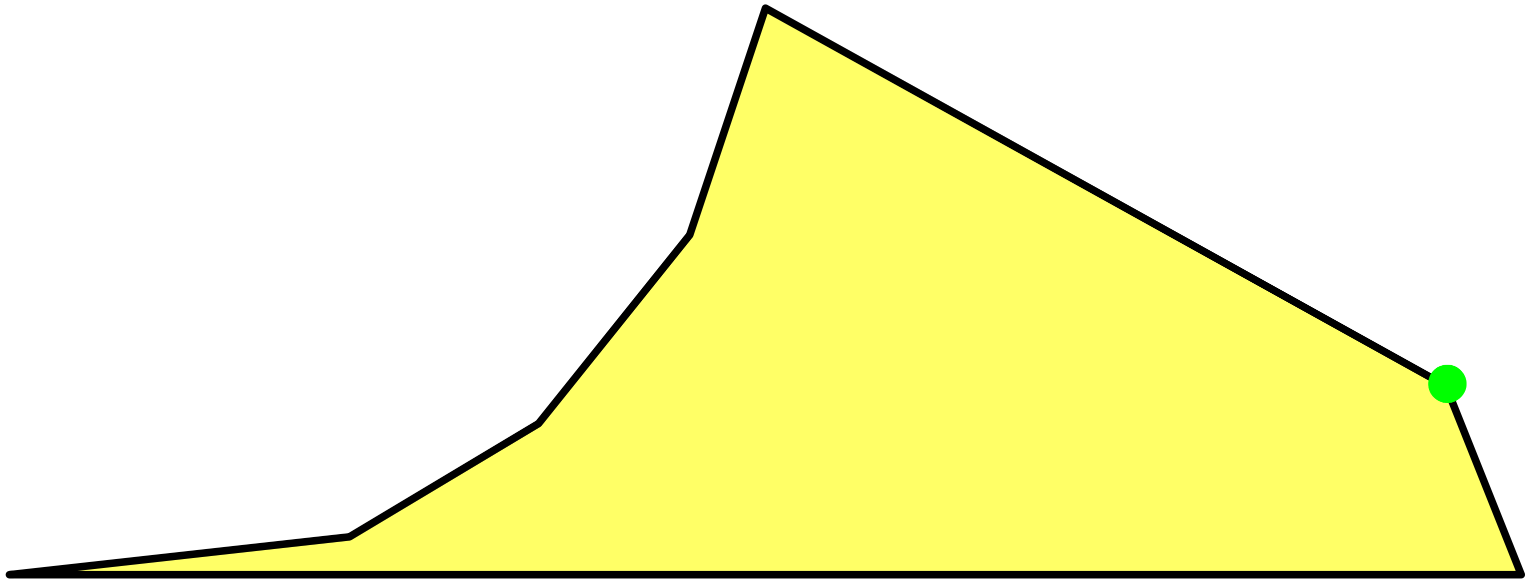




Details zur Verwaltung des Stapels

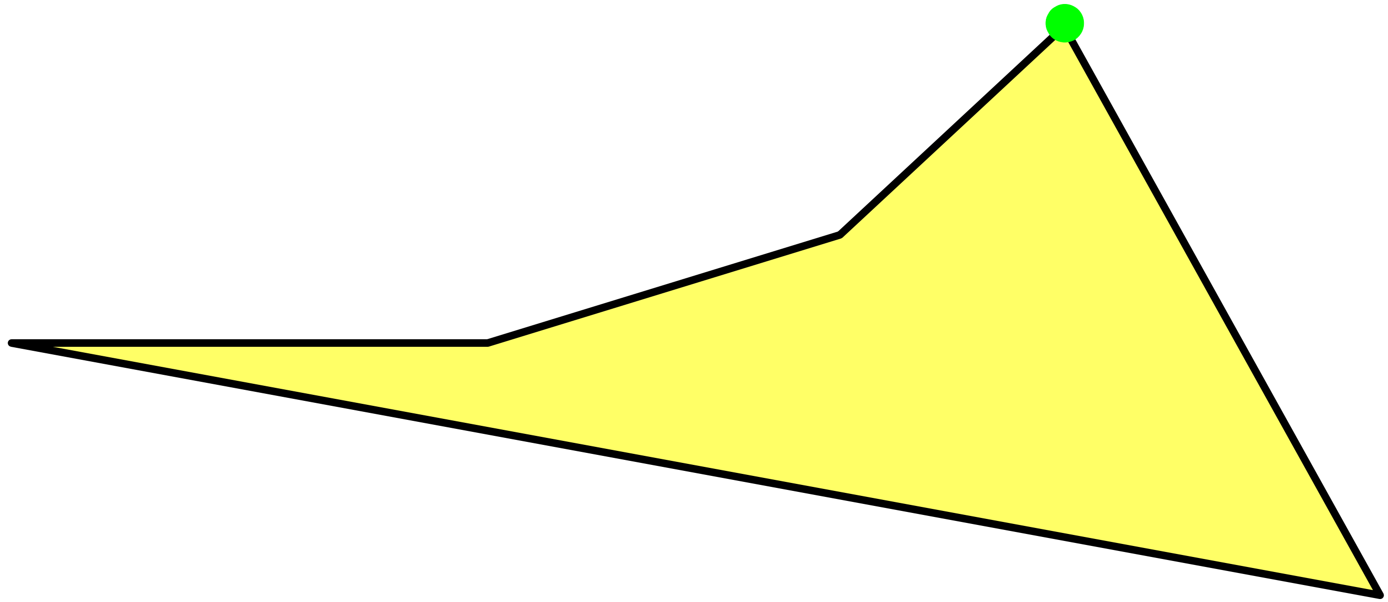
Der Stapel wird am Anfang mit den ersten beiden Ecken initialisiert.

Es gilt auch später immer: Die Ecken im Stapel bilden eine reflexe Kette und das unterste Element ist die Ecke mit kleinster x-Koordinate im Restpolygon.

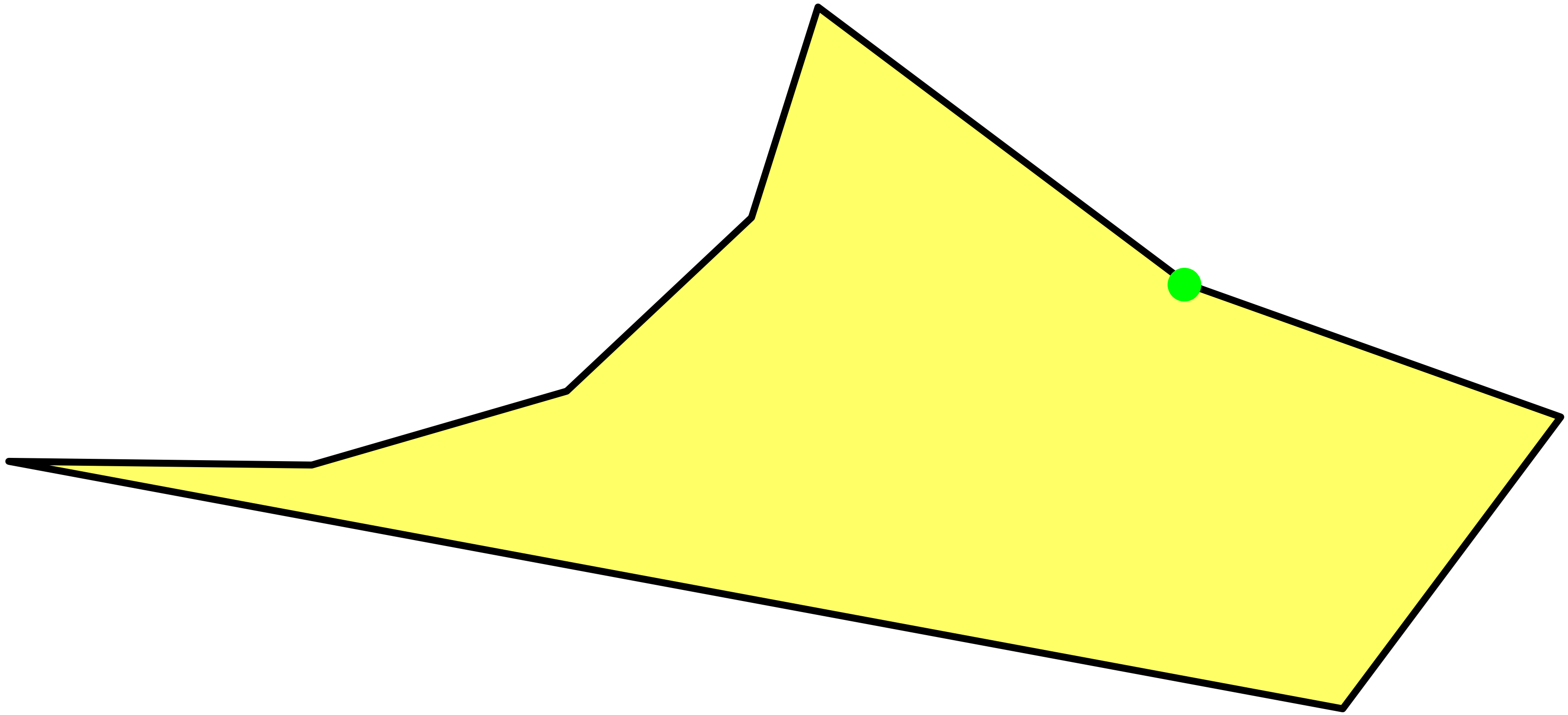


Bei der Bearbeitung der nächsten Ecke gibt es drei Fälle.

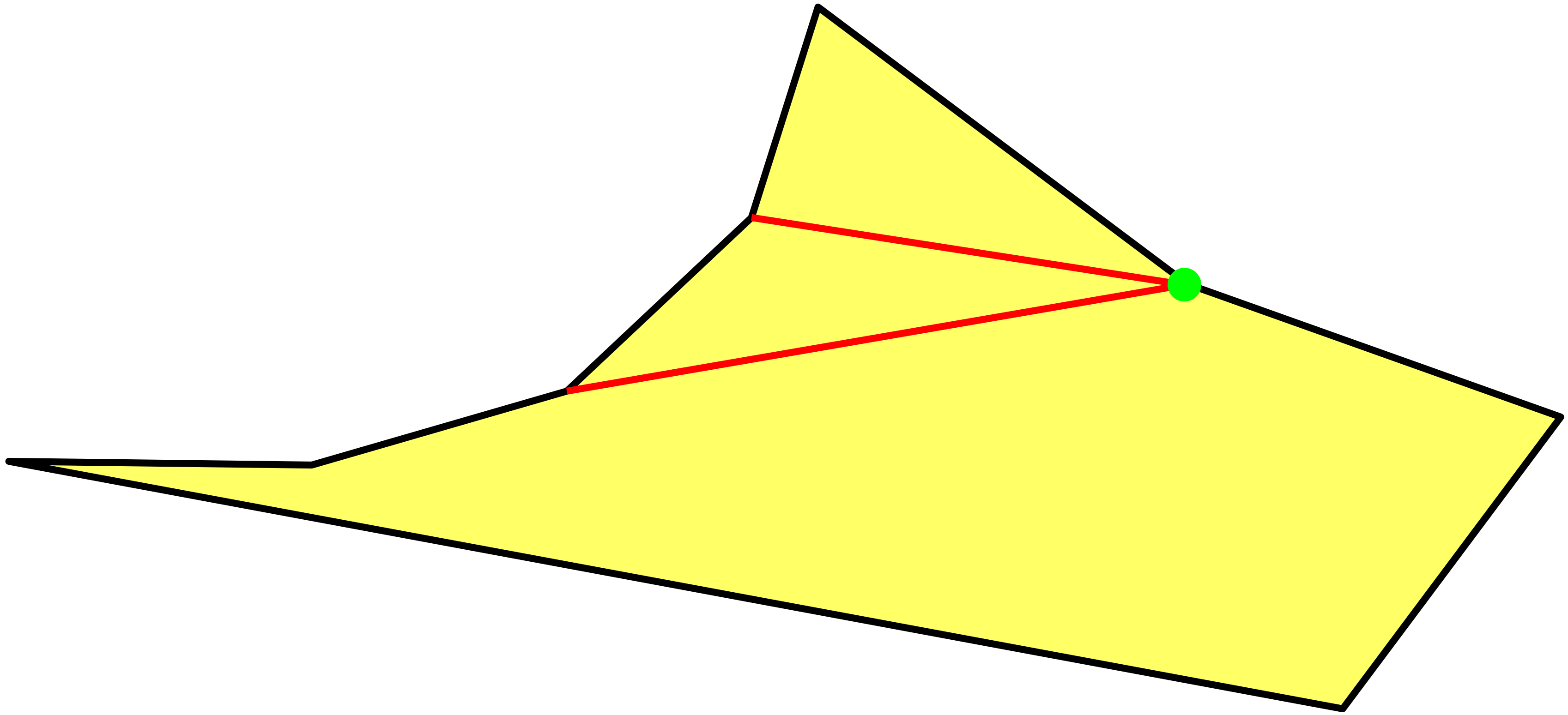
1.Fall: Die nächste Ecke verlängert die reflexe Kette.



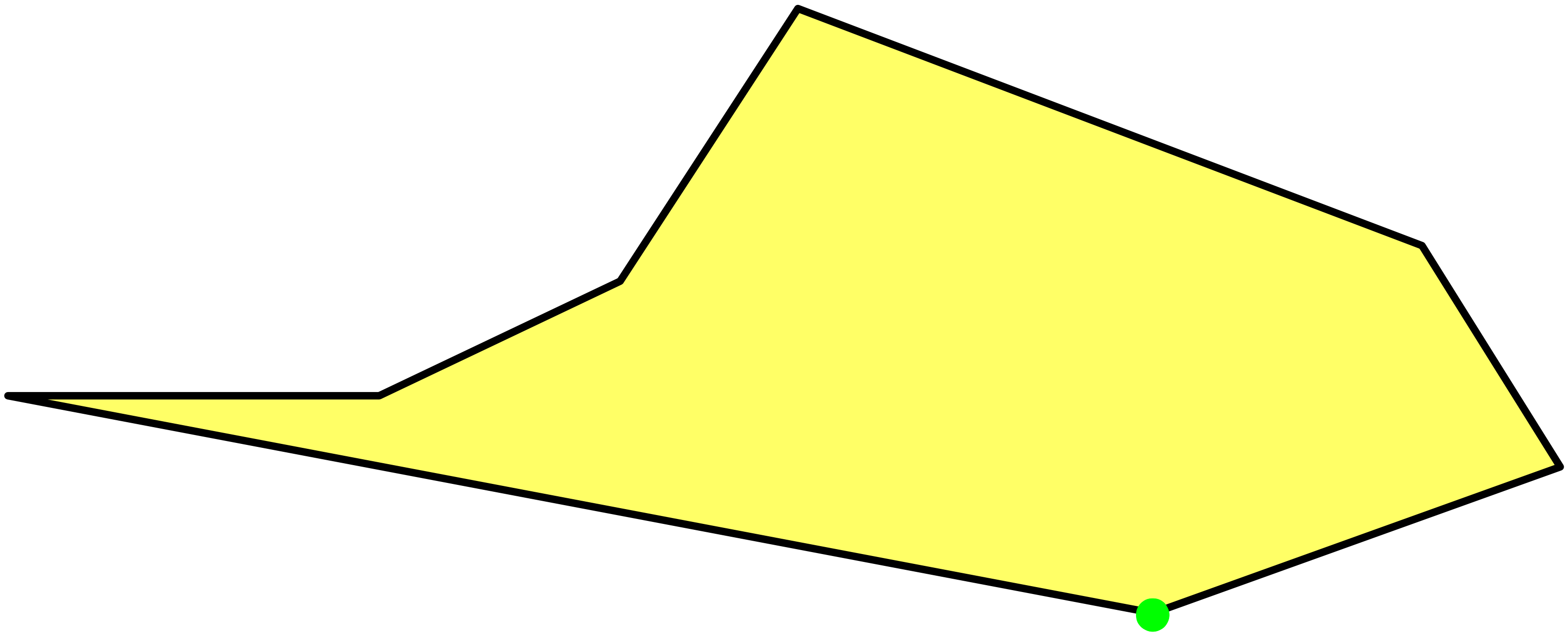
<u>2.Fall:</u> Die nächste Ecke verlängert die reflexe Kette nicht und liegt auf der gleichen Seite wie die reflexe Kette.



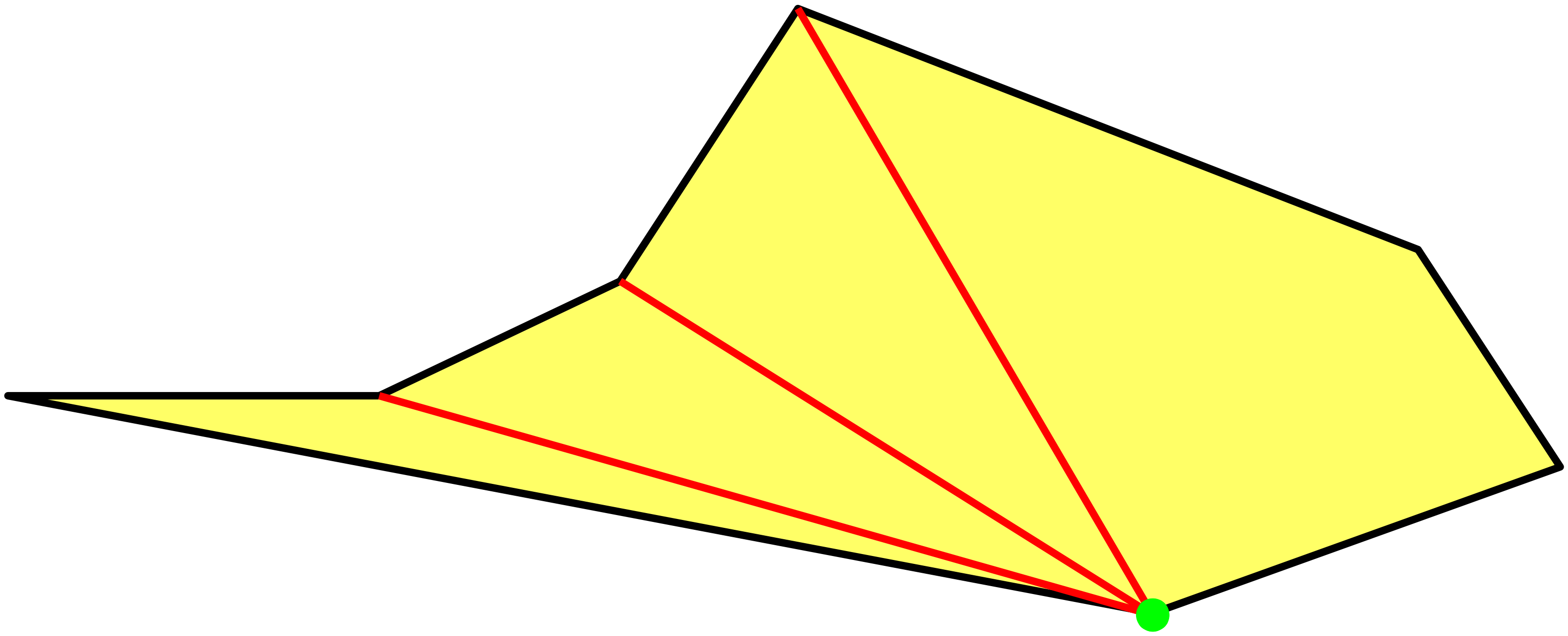
Die reflexe Kette wird entsprechend gekürzt und die bearbeitete Ecke anschließend auf den Stapel gelegt.



<u>3.Fall:</u> Die nächste Ecke verlängert die reflexe Kette nicht und liegt nicht auf der gleichen Seite wie die reflexe Kette.



Alle Ecken auf dem Stapel werden abgearbeitet. Dann wird der Stapel mit den beiden ersten Ecken im Restpolygon initialisiert.



Analyse der Laufzeit

Der Aufwand zur Verarbeitung einer Ecke hängt vom aktuellen Zustand des Stapels ab.

Je mehr Ecken schon auf dem Stapel sind, desto mehr Aufwand kann anfallen.

Aber:
Insgesamt betrachtet wird jede Ecke im Wesentlichen
- ein Mal auf den Stapel gelegt und
- (irgendwann wieder) ein Mal vom Stapel entfernt

Ergebnis: Laufzeit $O(n)$ (für monotones Polygon mit n Ecken)

5. Zusammenfassung

Ablauf insgesamt

1. Berechnung der Trapezzerlegung für die Kanten des Polygons

2. Entfernung der Trapeze außerhalb des Polygons

3. Zerlegung in x-monotone Polygone

4. Triangulation der einzelnen x-monotonen Polygone

Analyse der Laufzeit insgesamt

Berechnung der Trapezzerlegung:	$O(n\log n)$
Entfernen der äußeren Trapeze:	$O(n)$
Zerlegung in x-monotone Polygone:	$O(n)$
Triangulation der x-monotonen Polygone:	$O(n)$

Gesamtlaufzeit: $O(n\log n)$