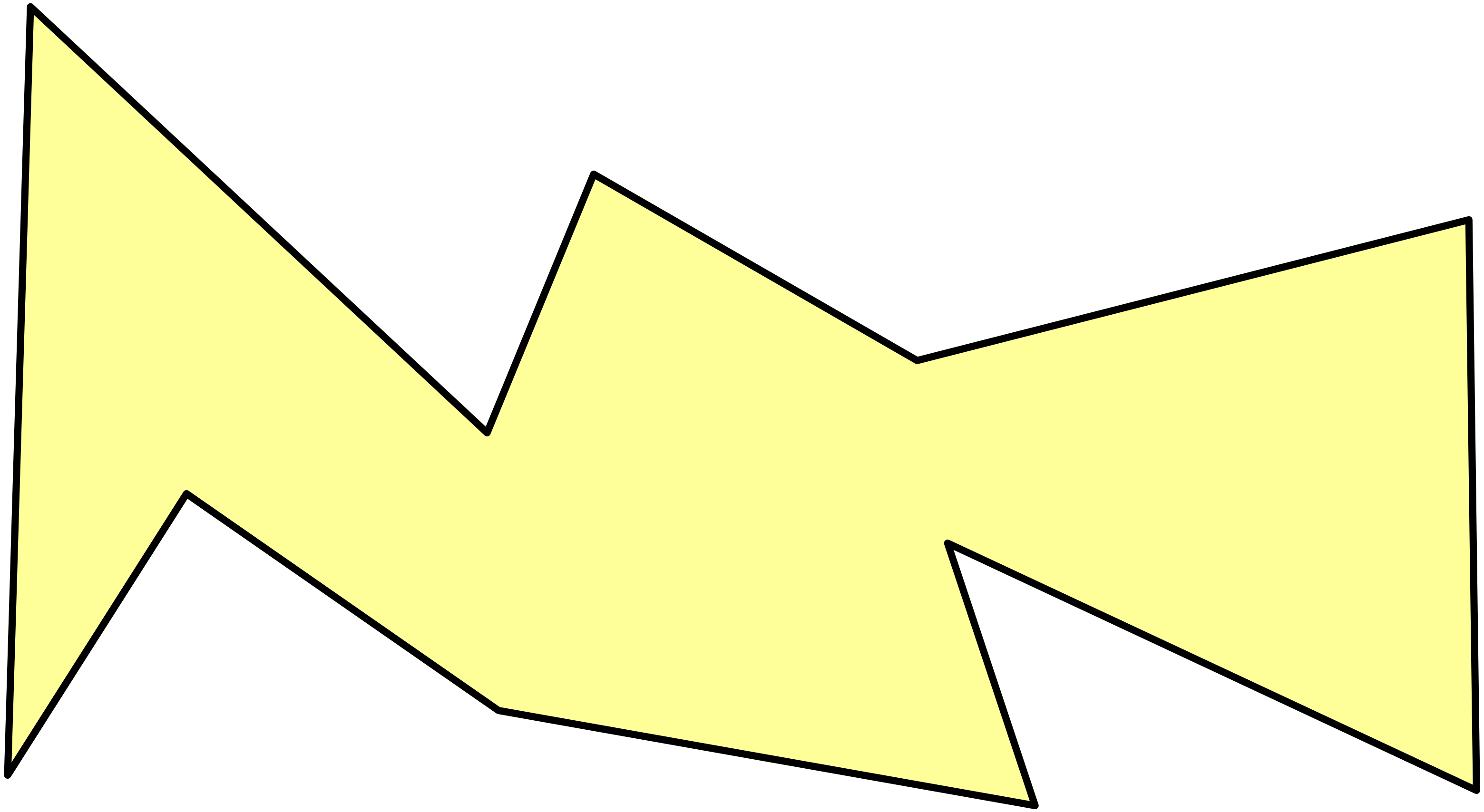
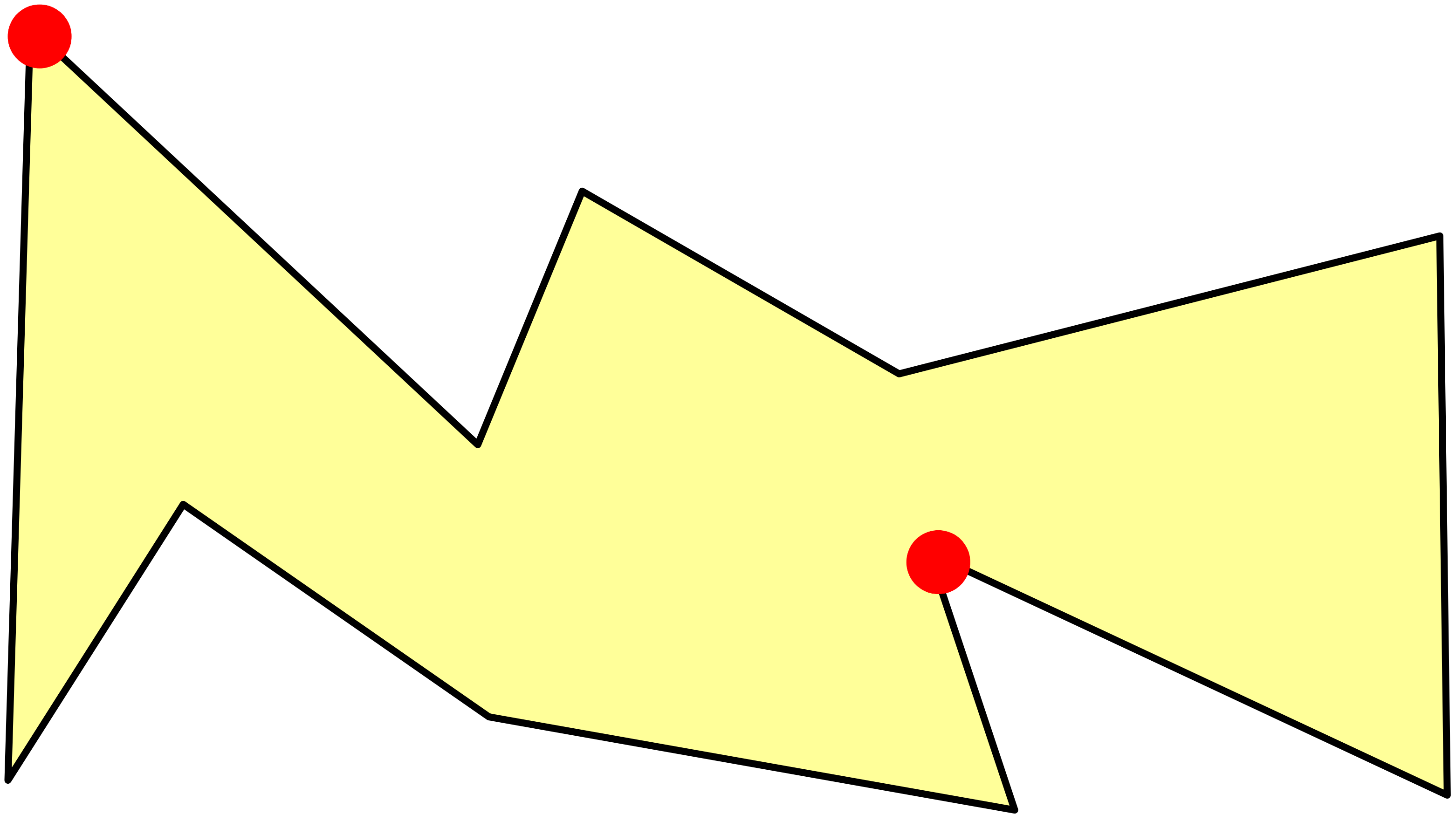
Ausleuchtung/Überwachung von polygonalen Flächen

1. Beschreibung der Aufgabenstellung

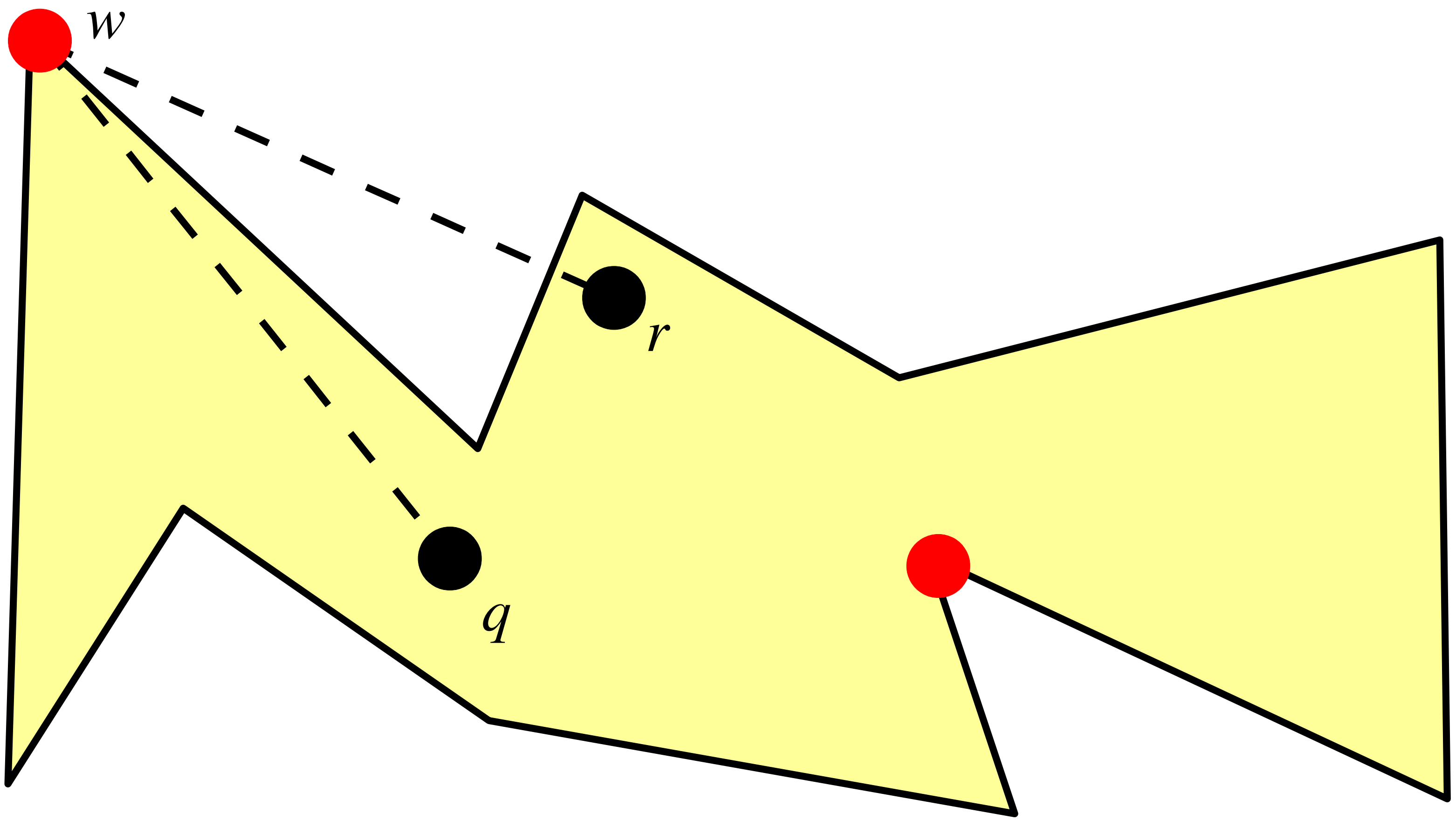
Gegeben ist der Grundriss eines Raumes.



In den Ecken des Raumes sollen Geräte platziert werden, die zusammen den ganzen Raum lückenlos überwachen.

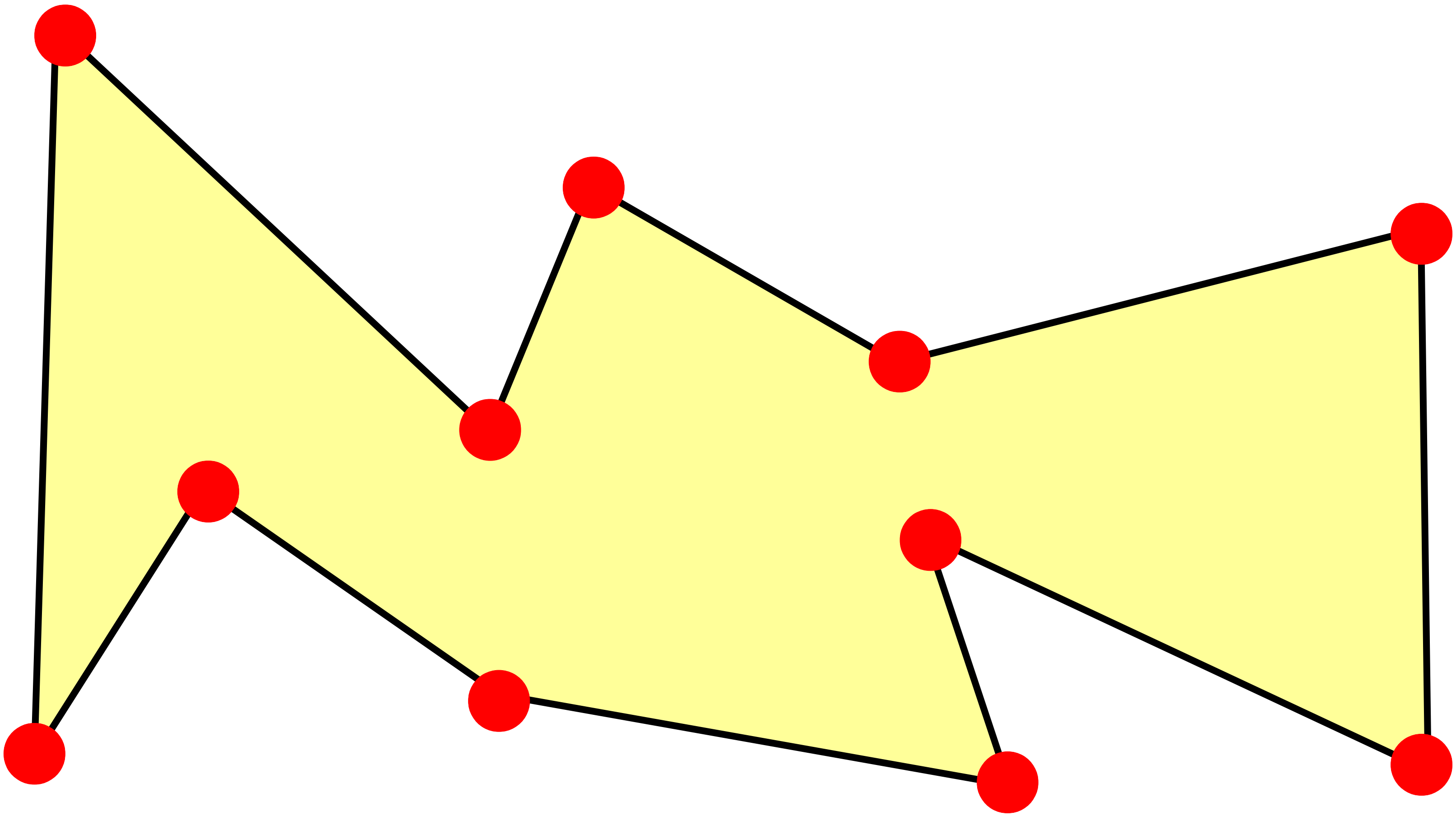


Ein Gerät w sieht einen Punkt q des Polygons genau dann, wenn die Strecke zwischen w und q innerhalb des Polygons verläuft.

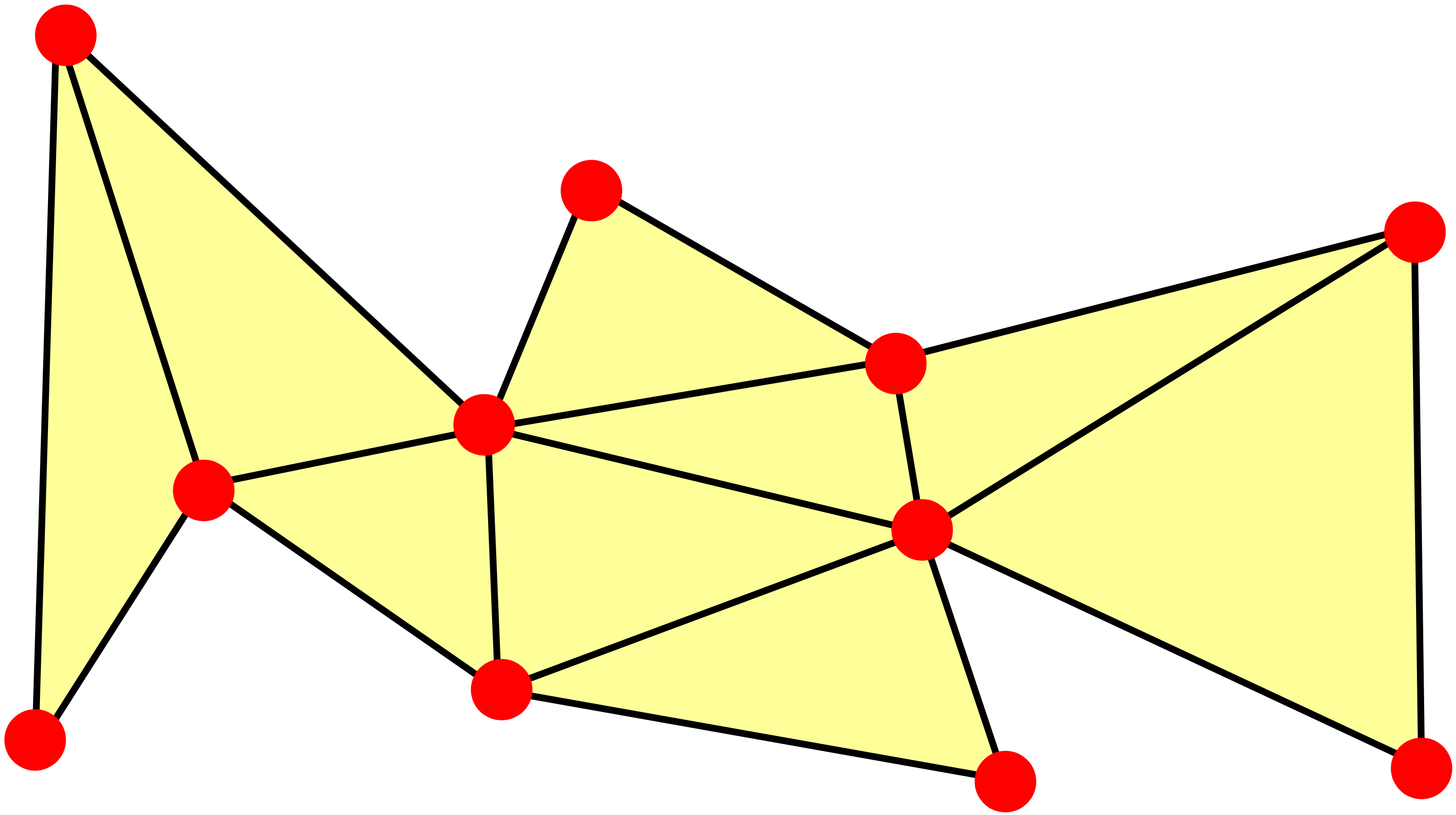


2. Welche Positionen kommen für die Überwachungsgeräte in Frage?

Jedes Polygon ist lückenlos überwacht, wenn an **jeder** Ecke ein Gerät aufgestellt wird.



Dies sieht man leicht, wenn man das Polygon trianguliert, denn offensichtlich wird dann **jedes Dreieck** lückenlos überwacht.



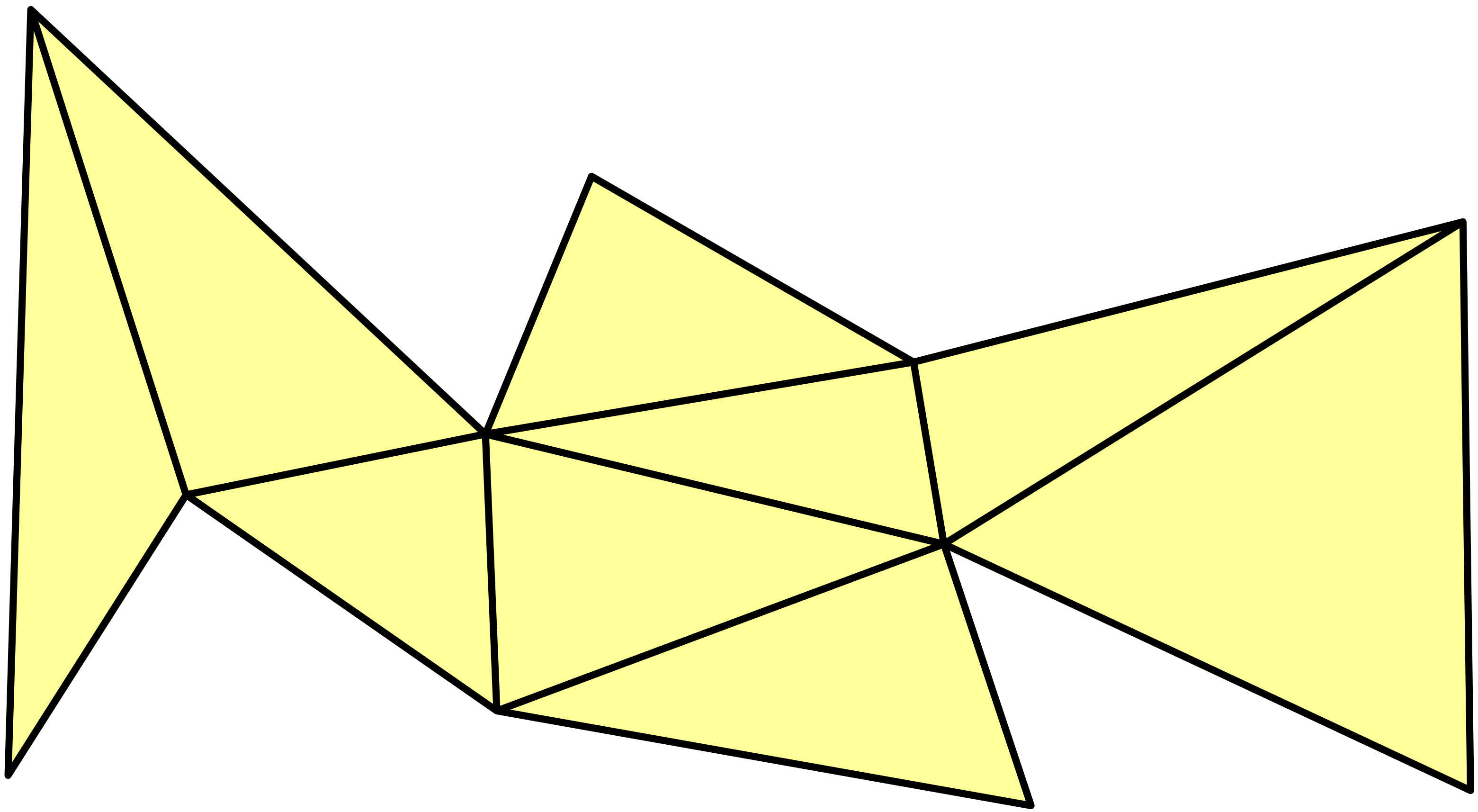
Zur Überwachung eines einfachen Polygons mit n Ecken genügen also immer **höchstens *n*** Überwachungsgeräte.

Als Orte zum Aufstellen für die Geräte kann man sich dabei auf die **Eckpunkte** des Polygons beschränken.

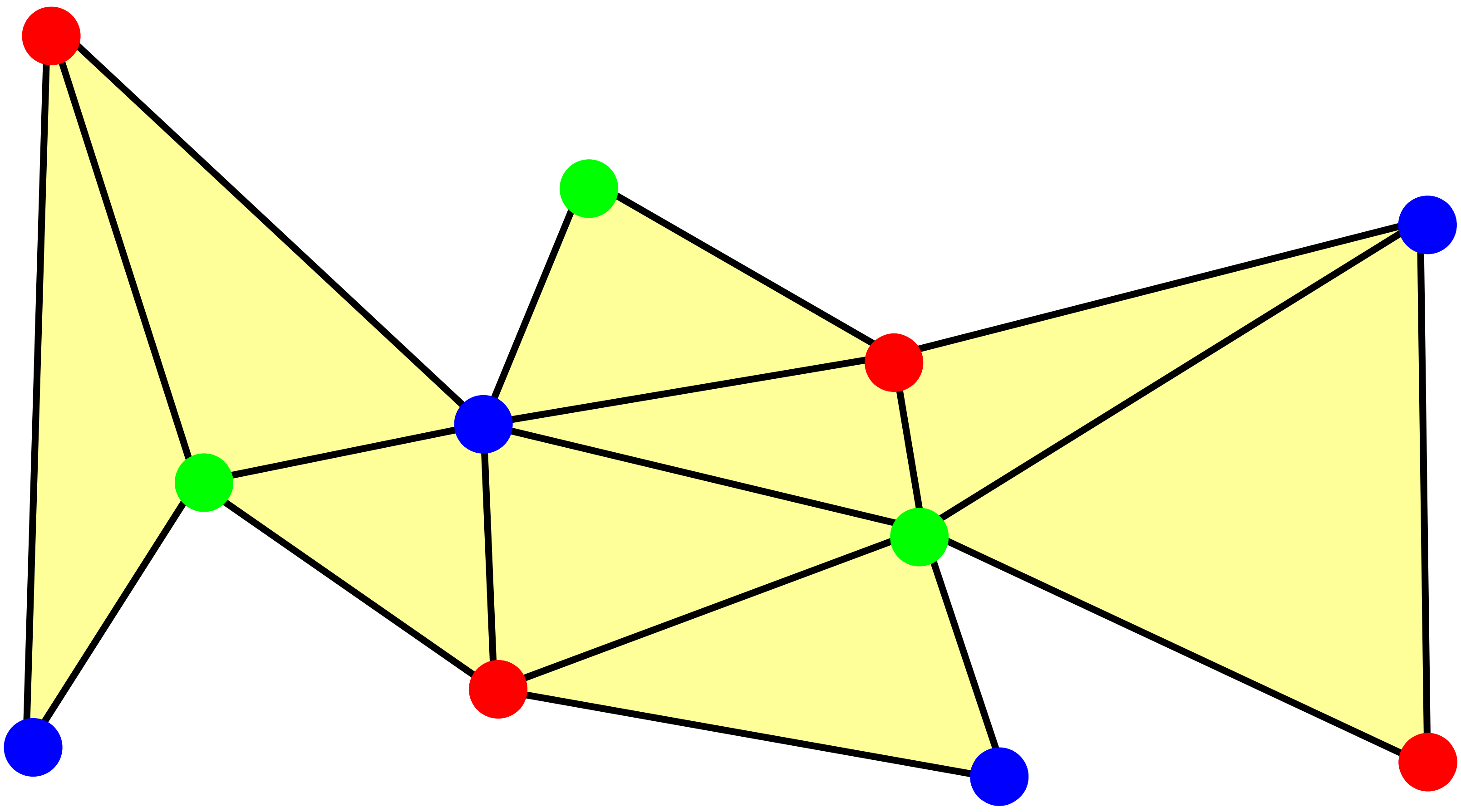
Im Folgenden wollen wir uns überlegen, warum man für eine lückenlose Überwachung **nicht in allen Ecken** ein Gerät benötigt.

3. Idee für eine sparsame Platzierung der Überwachungsgeräte

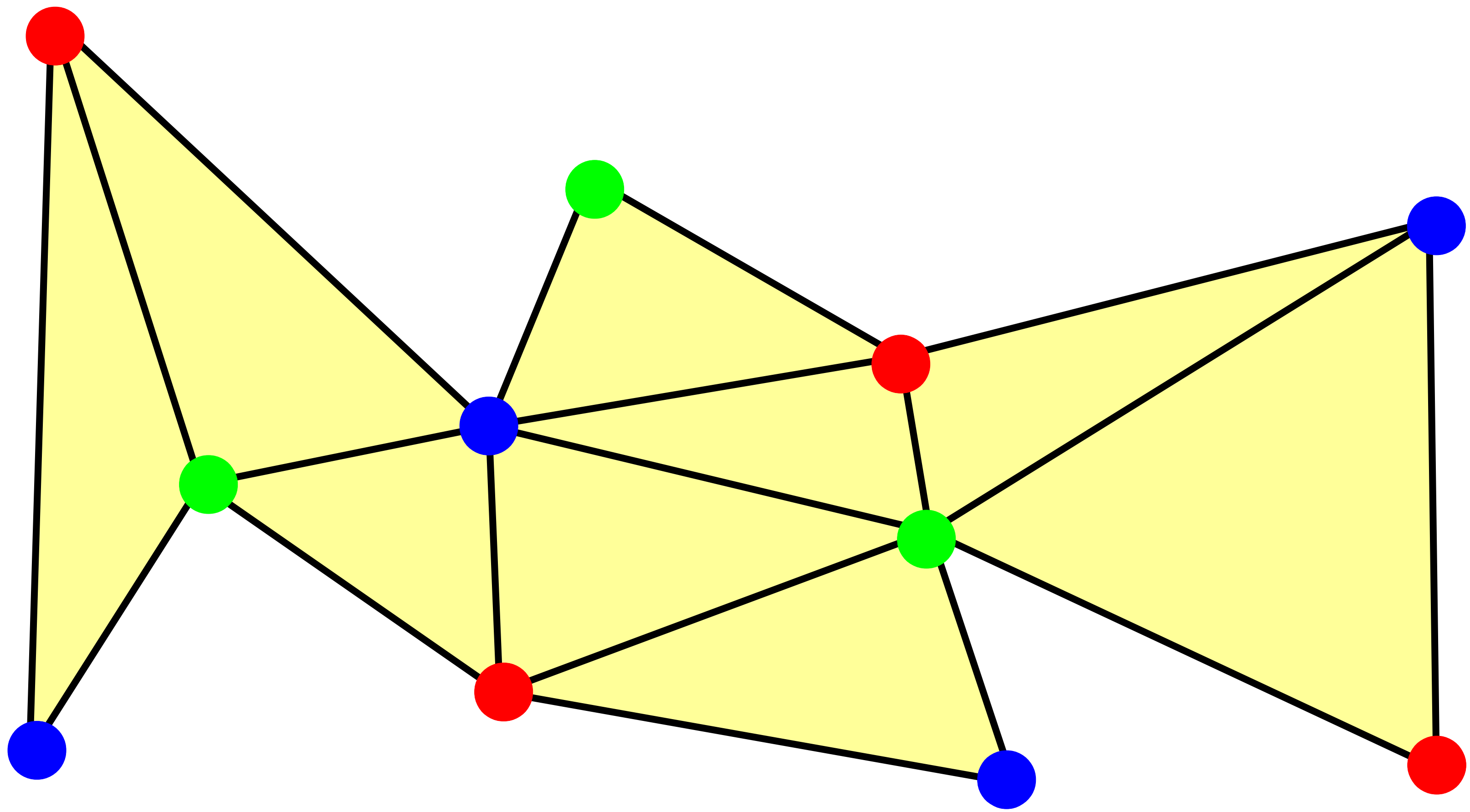
Finde eine Teilmenge W der Ecken, sodass jedes Dreieck einer festen Triangulation **mindestens eine Ecke** in W hat.



Dazu färben wir die Ecken des Polygons mit **drei Farben**, sodass keine Ecken, die durch eine Kante oder Diagonale verbunden sind, die gleiche Farbe erhalten.

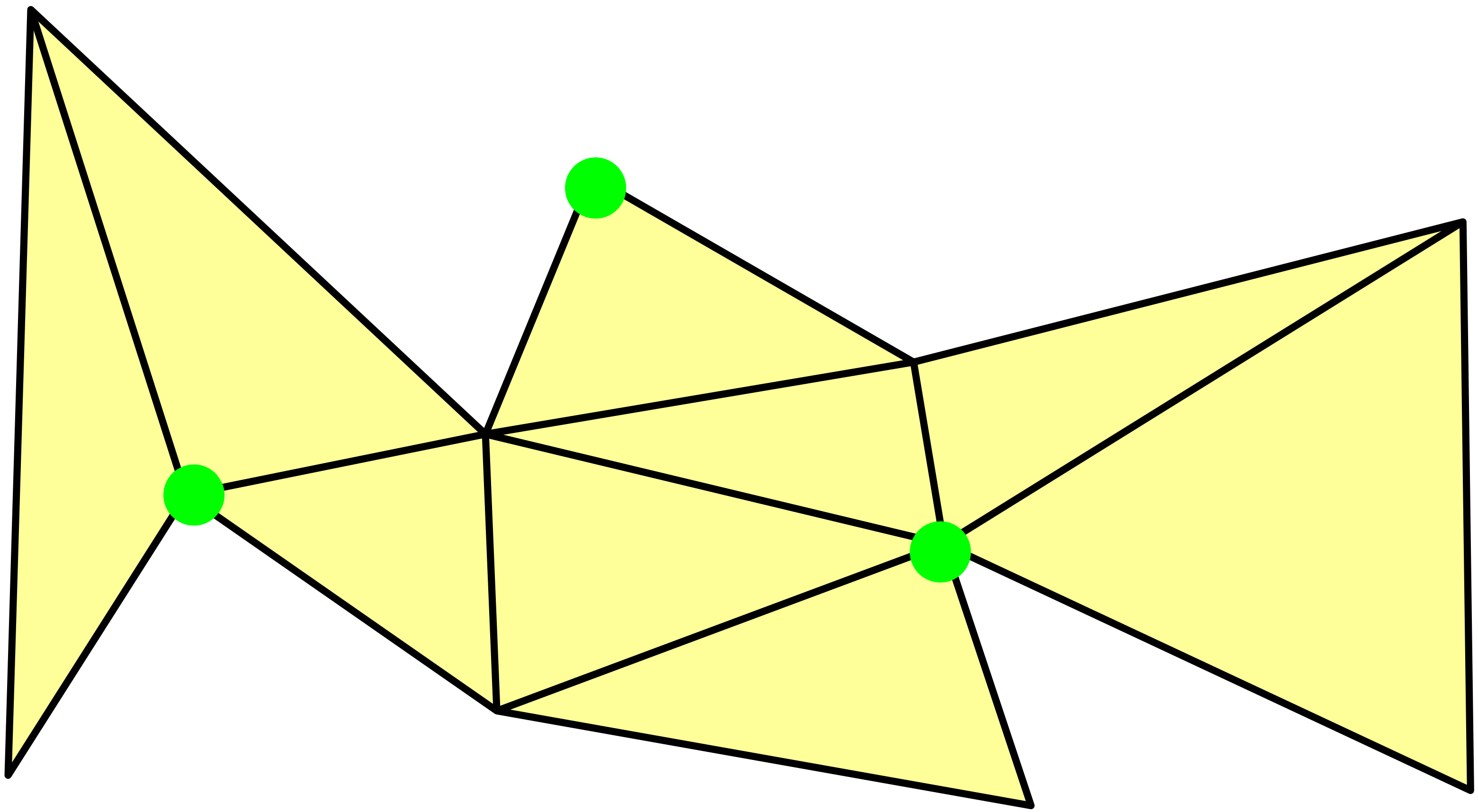


Es genügt dann, sich **eine Farbe** auszusuchen und Geräte nur an den Ecken mit dieser Farbe aufzustellen.



Wir wählen natürlich die Farbe, mit der die **wenigsten Ecken** eingefärbt sind.

Das können nicht mehr als **ein Drittel** der Ecken sein.

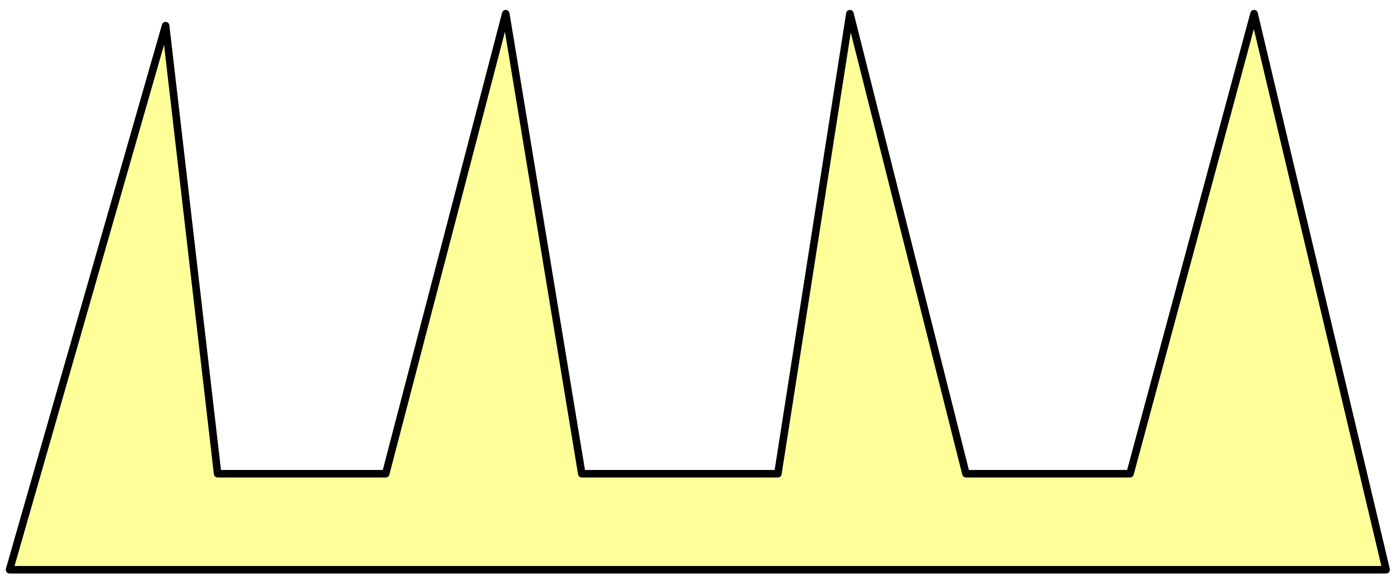


<u>Was bleibt noch zu tun?</u>

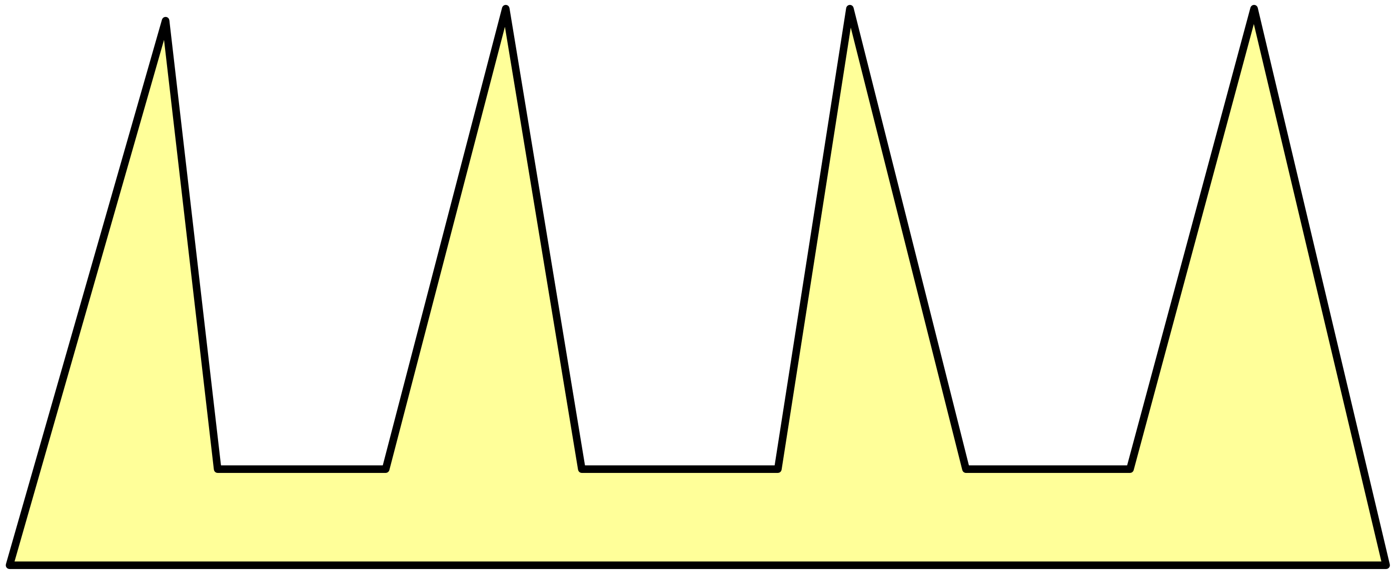
Wir müssen uns noch überlegen, ob unsere Idee tatsächlich für **jedes einfache Polygon** funktioniert.

Zuerst versuchen wir aber herauszufinden, ob wir nicht mit irgendeiner anderen Idee **noch sparsamer** sein könnten.

Wie viele Überwachungsgeräte benötigt man **mindestens** für das folgende Polygon mit n=12 Ecken?



Mindesten $n/3 = 4$. (mindestens eins für jede der Spitzen)



Fazit

Das Beispielpolygon lässt sich auf **beliebig viele** Spitzen verallgemeinern.

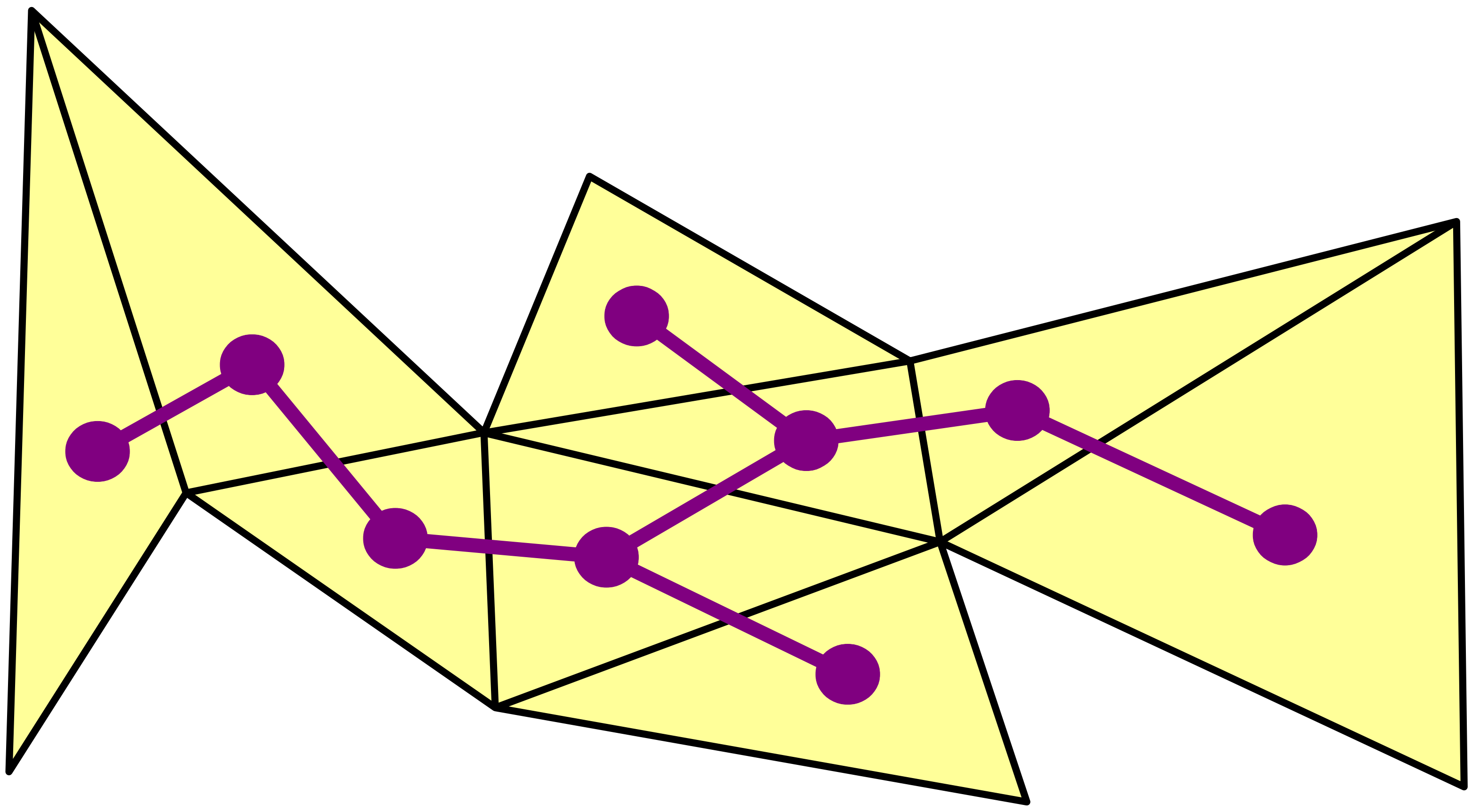
Somit gibt es für **jedes** $\boldsymbol{n}$ ein Polygon, für das man mindestens $n/3$ Geräte benötigt.

In diesem Sinne liefert unsere Idee mit der Dreifärbung der Triangulation ein **optimales** Ergebnis.

4. Berechnung einer Dreifärbung der Ecken

Zunächst wird das einfache Polygon **trianguliert**.

Dann berechnen wir den Graphen, der beschreibt, welche Dreiecke eine **Kante gemeinsam** haben (*dualer Graph*).



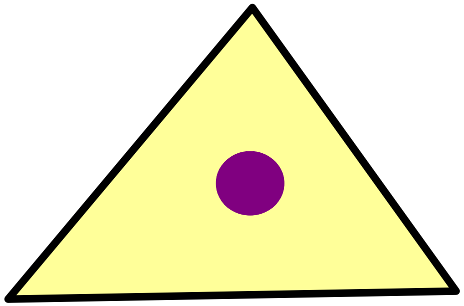
Lemma

Der zu einer Triangulation eines einfachen Polygons duale Graph ist ein Baum mit maximalem Knotengrad drei.

Beweis:

Dass der maximale Knotengrad drei ist, ergibt sich sofort daraus, dass jedes Dreieck **maximal an drei andere Dreiecke** grenzt.

Dass es sich um einen Baum handelt, überlegen wir uns **induktiv** nach der Zahl n der Ecken des einfachen Polygons.



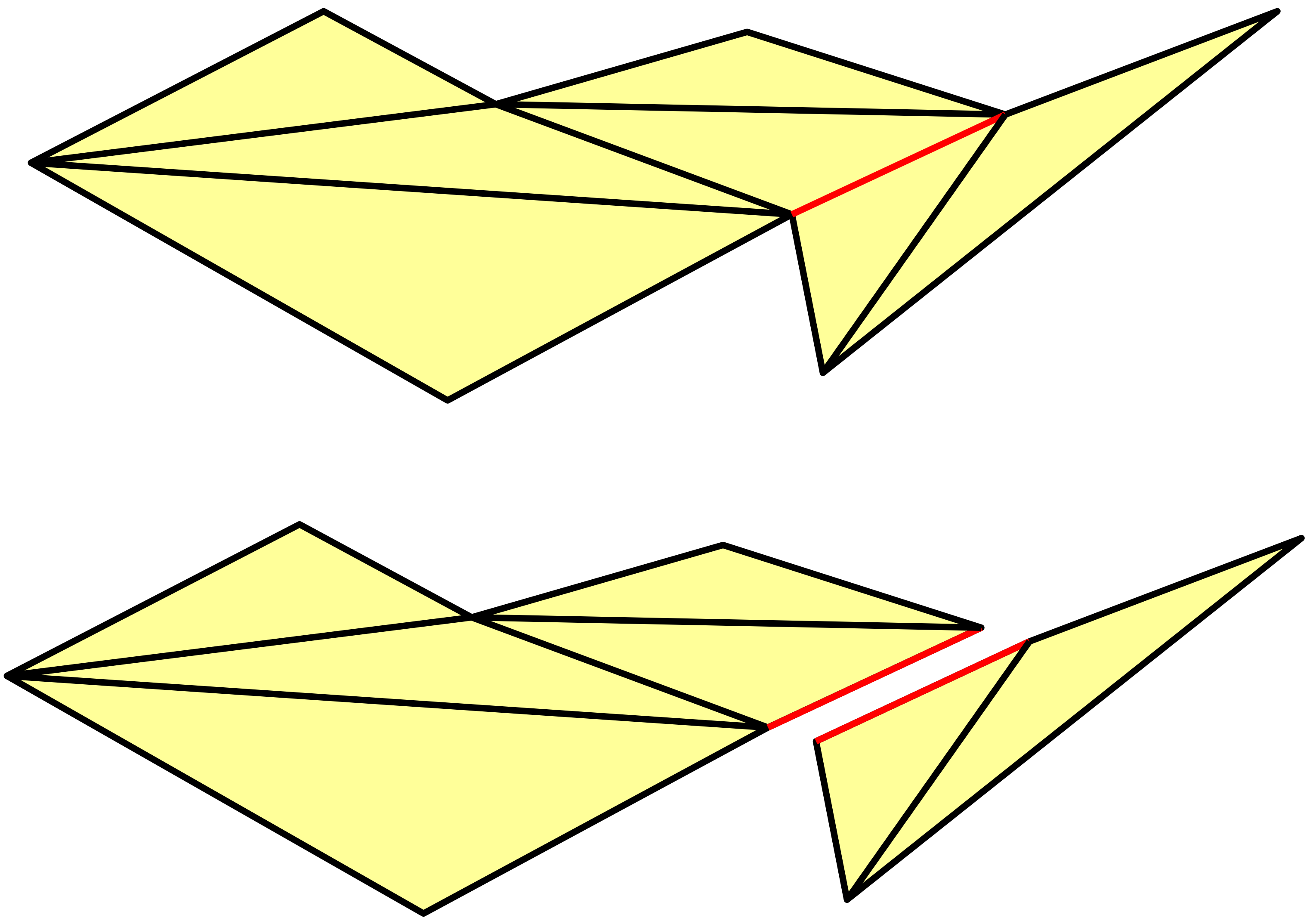
<u>Induktionsanfang:</u> $n = 3$

<u>Induktionsschritt:</u> $n > 3$

Dann muss es in der Triangulation eine Dreiecksseite geben, die keine Kante des Polygons ist (*Diagonale*).

Entlang dieser Dreiecksseite zerlegen wir das Polygon.

Zerlegung entläng einer Diagonale

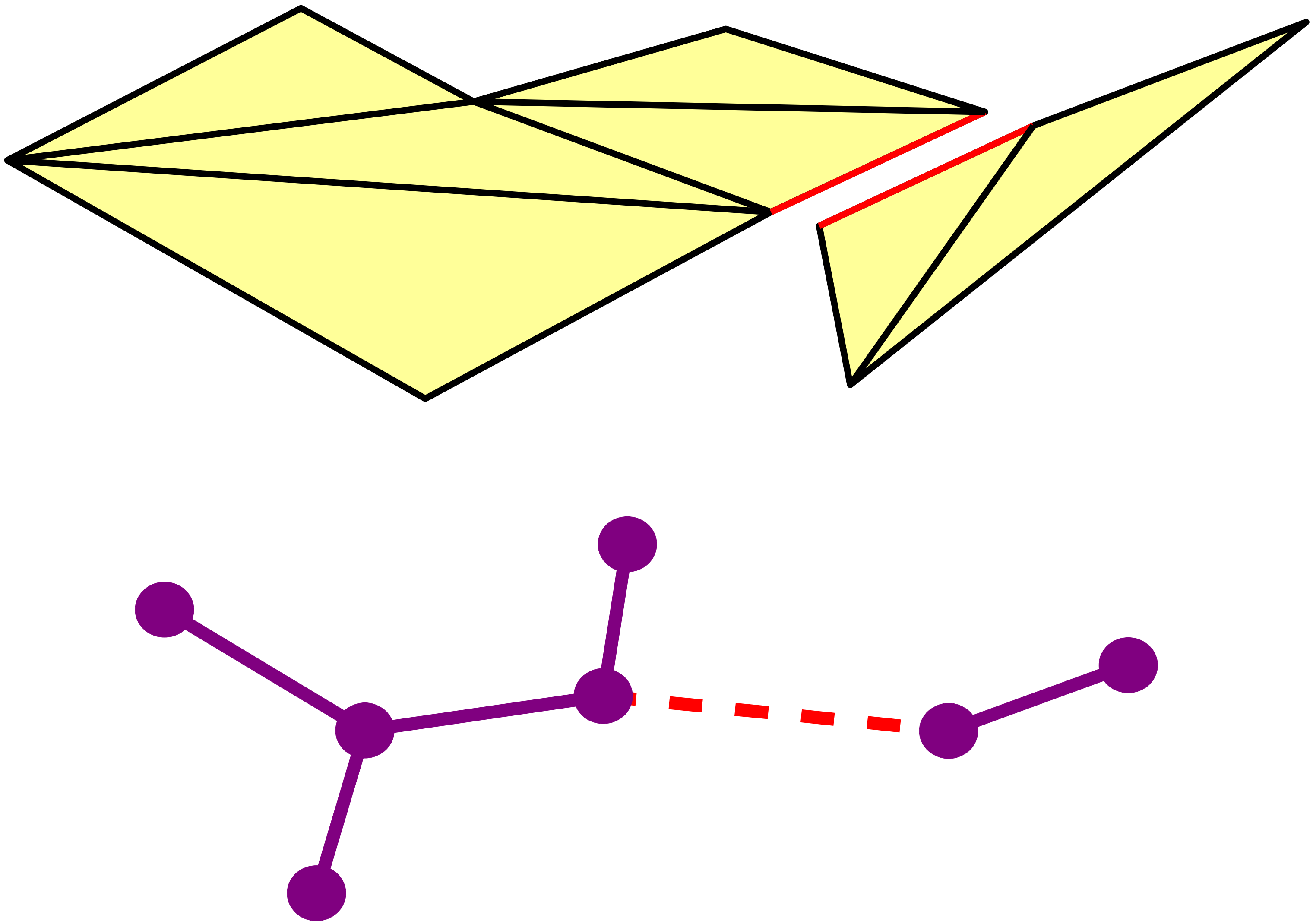


Die durch das Zerschneiden entstandenen Teilpolygone haben beide **weniger als *n* Ecken**.

Nach **Induktionsvoraussetzung** ist der duale Graph jeweils ein Baum.

Diese beiden Bäume werden über eine neue Kante miteinander **verbunden** und dadurch entsteht natürlich wieder ein Baum.

Verbinden der beiden Bäume

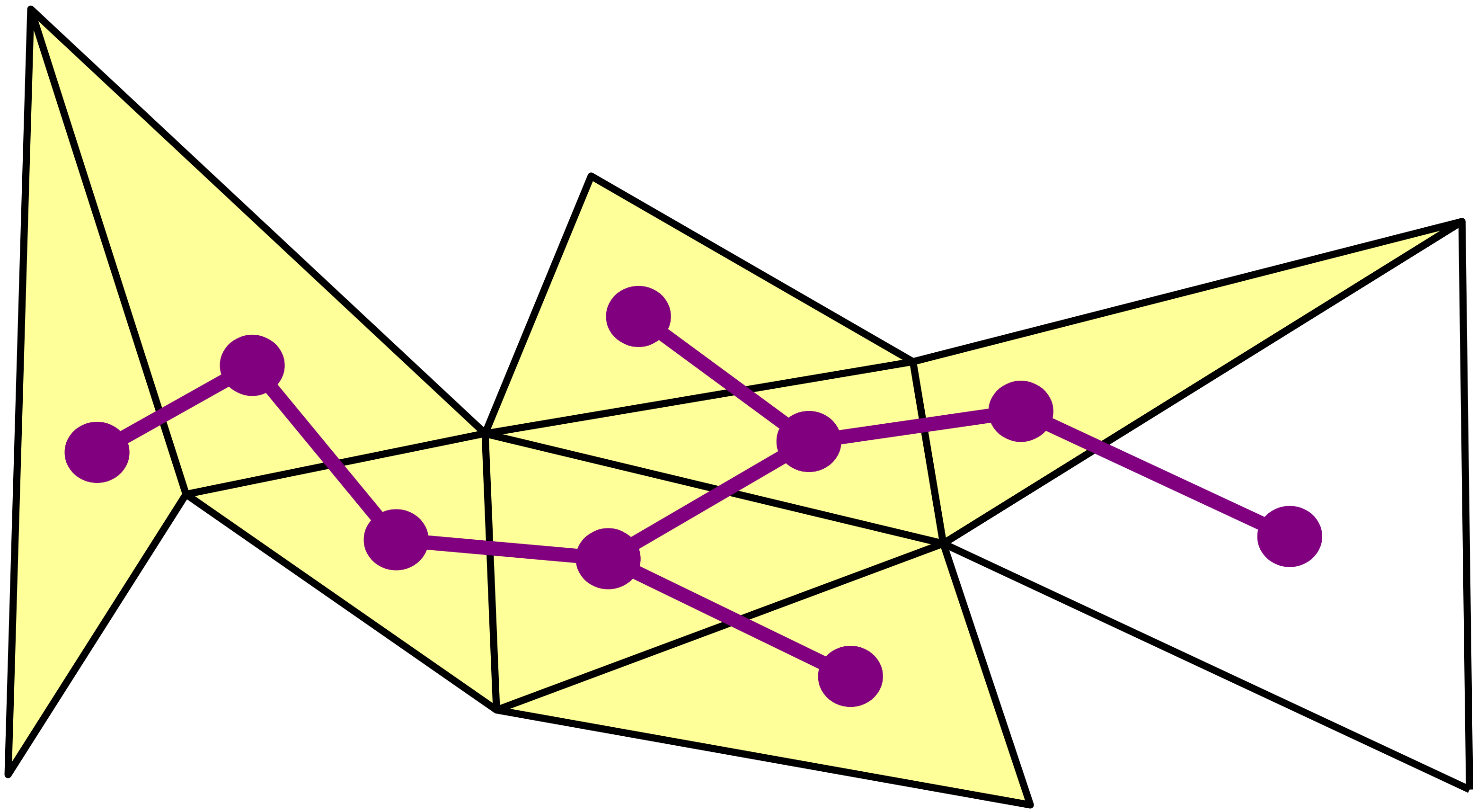


Der aus der Triangulation gewonnene Baum hilft uns nun eine **geeignete Reihenfolge** zu finden, in der wir die Ecken des Polygons färben:

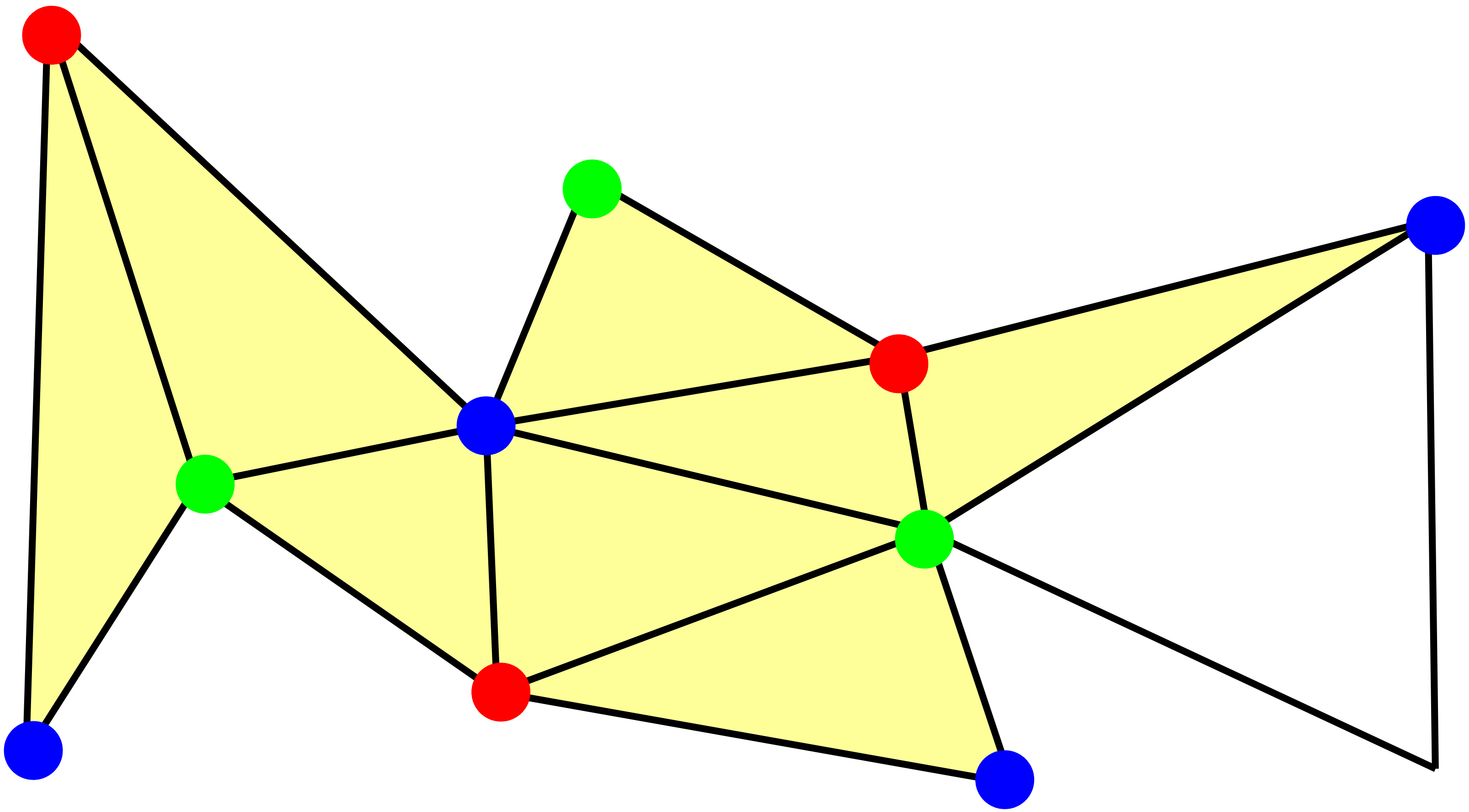
Wir arbeiten uns von einem **Blatt** des Baumes vor.

Dabei verwenden wir, dass jeder Baum **mindestens zwei** Blätter hat.

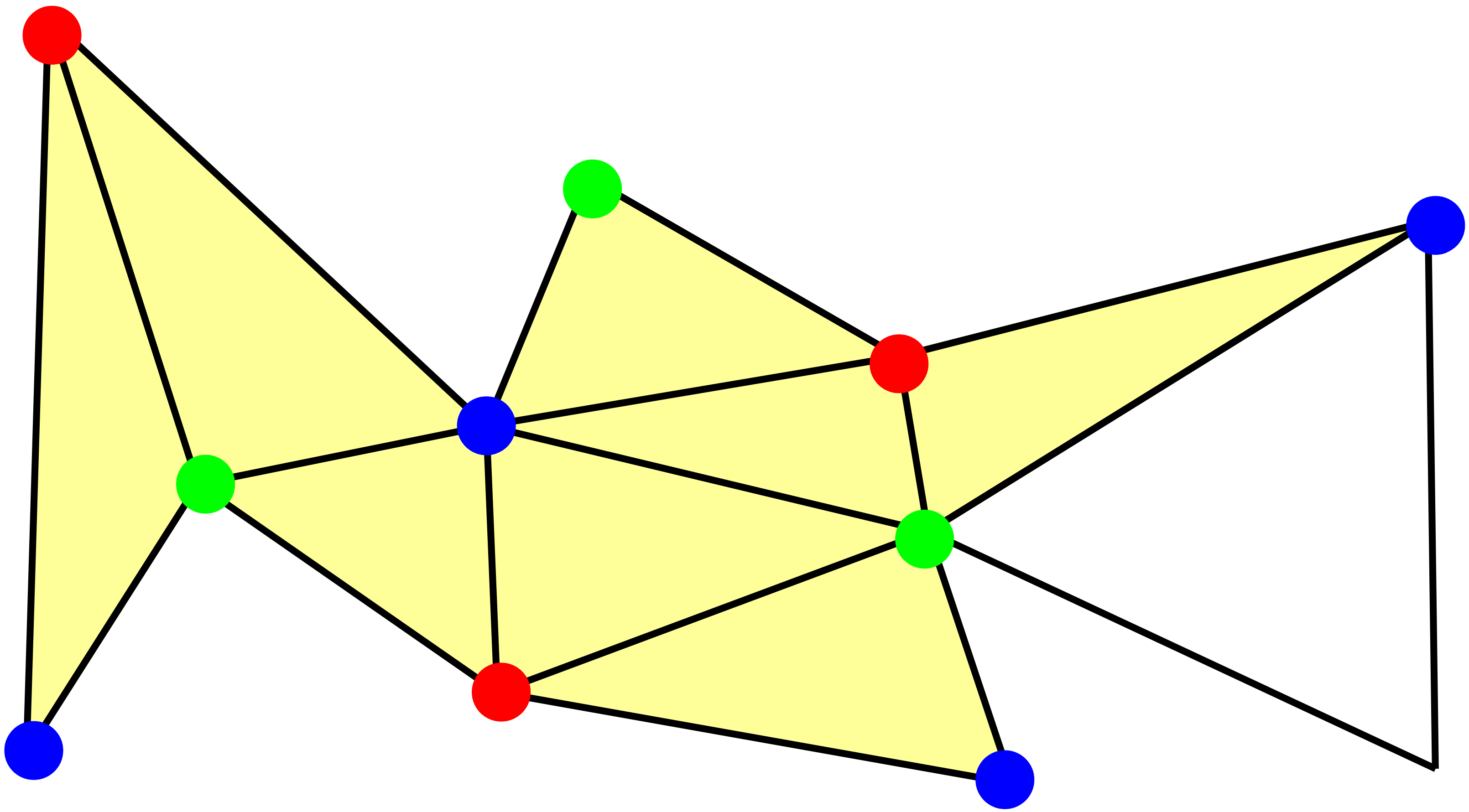
Wir wählen ein “Blattdreieck” und betrachten das Restpolygon mit einer Ecke weniger.

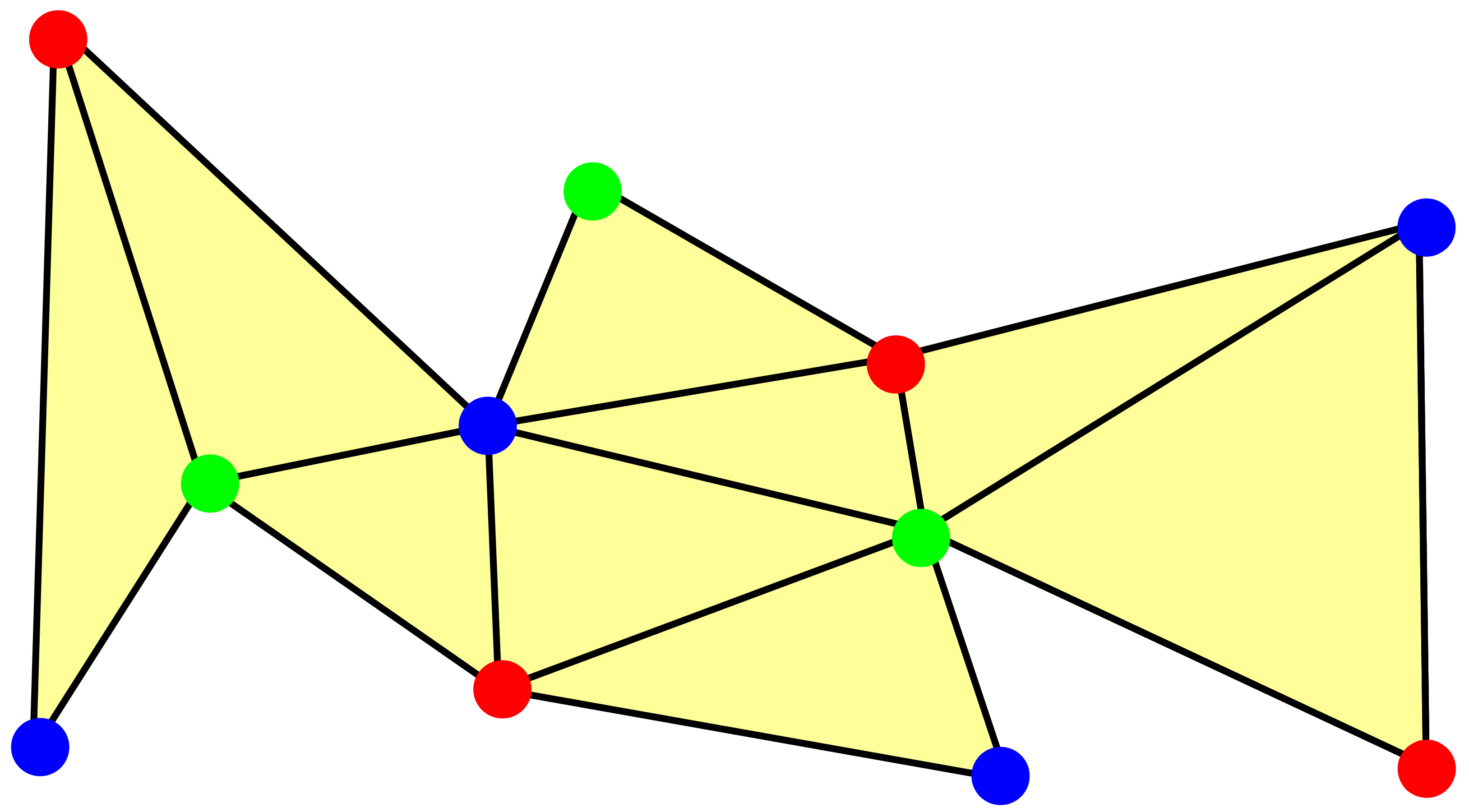


Das Restpolygon färben wir **rekursiv**.



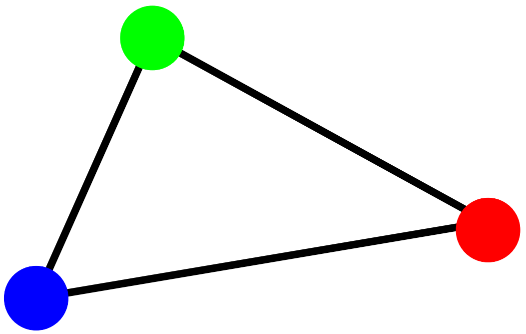
Da die noch nicht gefärbte Ecke des “Blattdreiecks” nur mit **zwei anderen Ecken** verbunden ist, kann man nun auch diese problemlos einfärben.





Die Rekursion läuft aus, wenn man bei einem Restpolygon ankommt, welches selbst ein **Dreieck** ist.

Den drei Ecken dieses Dreiecks weist man dann drei **verschiedene Farben** zu:



Zusammenfassung

Für jedes Polygon mit n Ecken kann man in $O(n \log n)$ Zeit eine Eckenmenge finden, von der aus das Polygon lückenlos überwacht werden kann und die **höchstens ein Drittel** der Ecken umfasst.

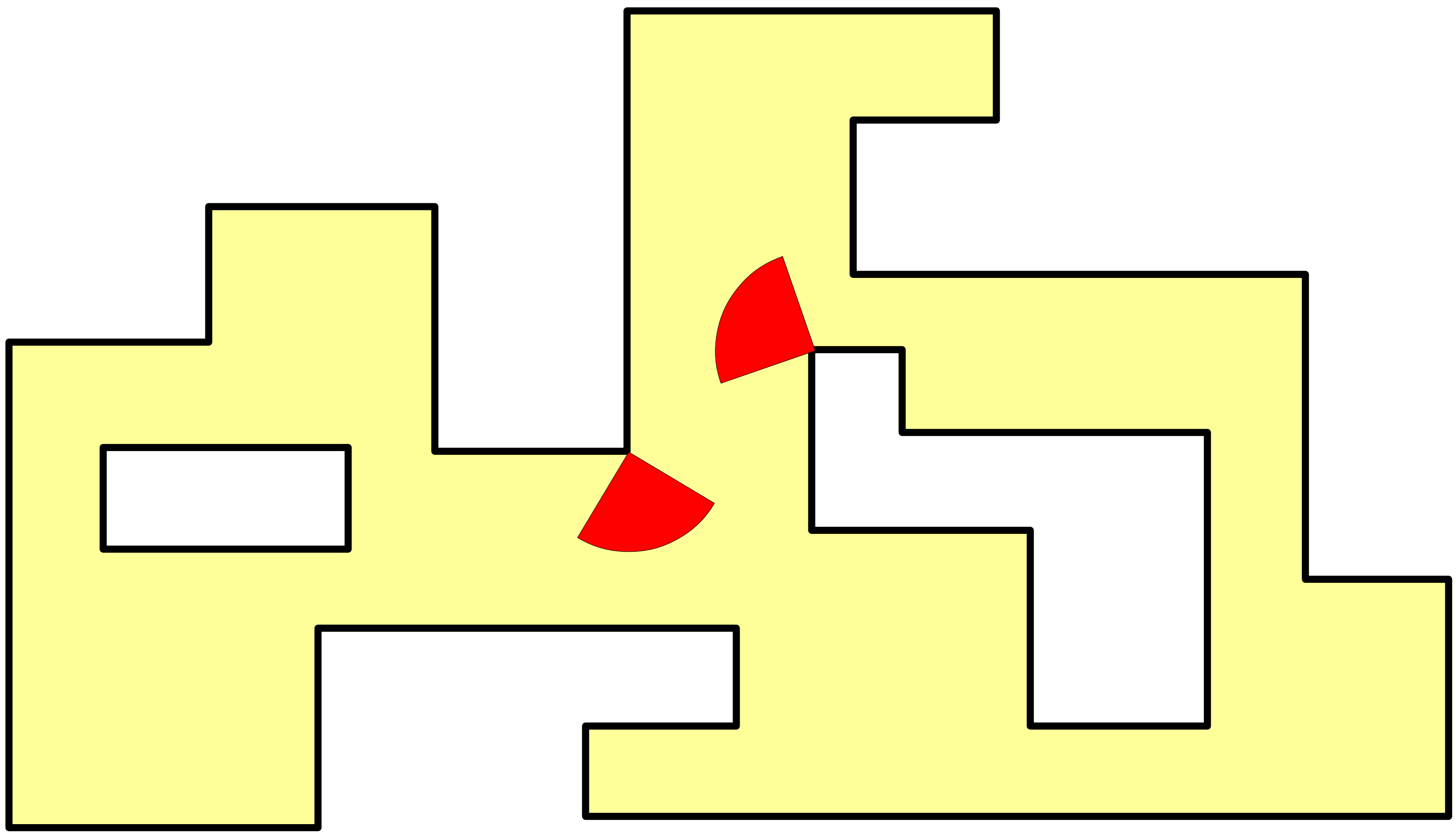
Für jede natürliche Zahl n gibt es ein Polygon mit n Ecken, bei der jede Eckenmenge, von der aus das Polygon lückenlos überwacht werden kann, **mindestens ein Drittel** der Ecken umfasst.

5. Varianten der Überwachungsaufgabe

Es gibt zahlreiche Varianten:

- Geräte ohne vollständige Rundumsicht
- Polygone mit Löchern
- Polygone nur mit Kanten in bestimmten Richtungen
- Geräte, die sich in einem bestimmten Bereich bewegen
- ...

Hier: - nur waagerechte und senkrechte Kanten (*Orthopolygon*)
- Löcher zugelassen
- Geräte mit 90 Grad Sichtbereich

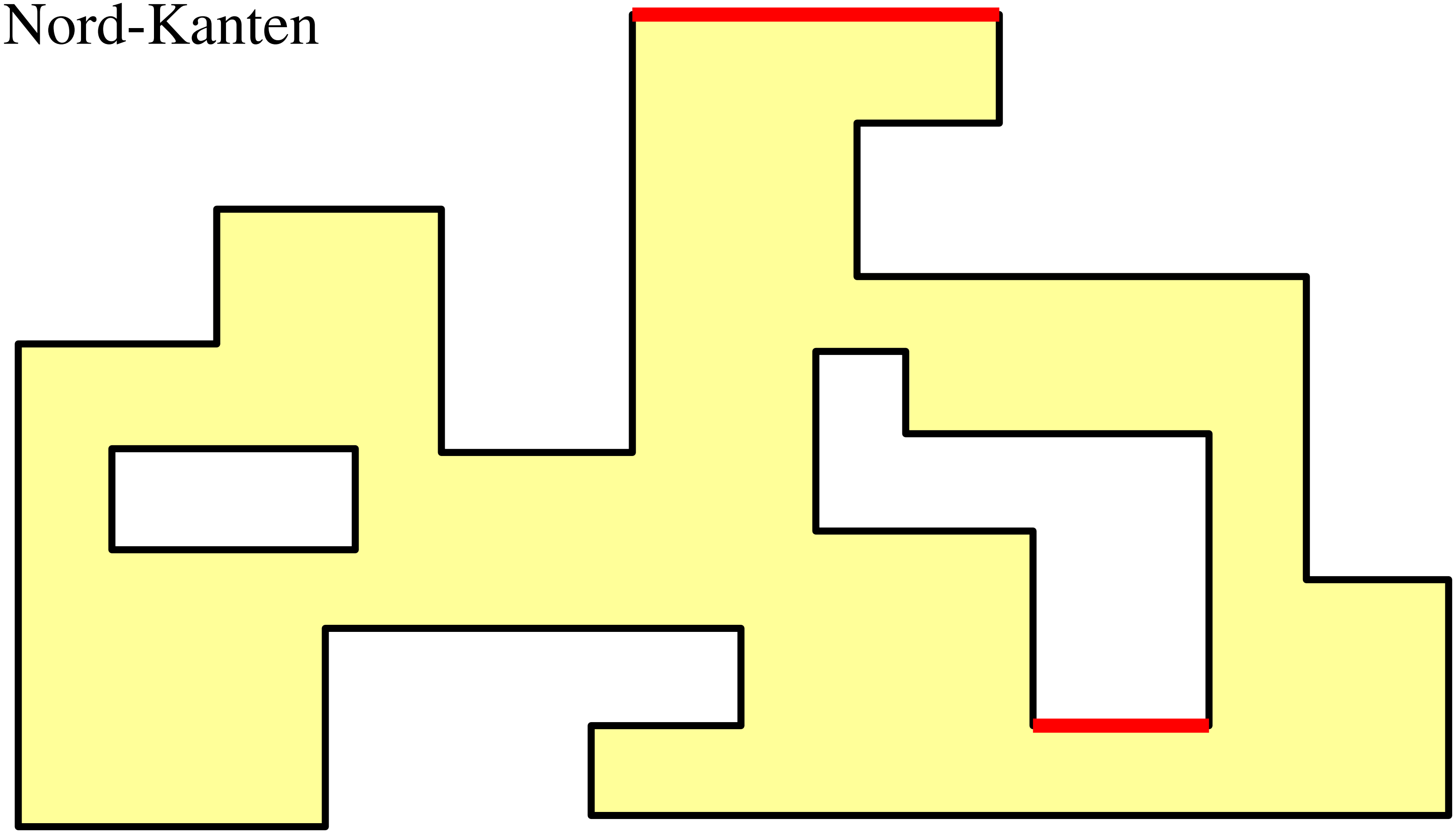


Ziel wieder:

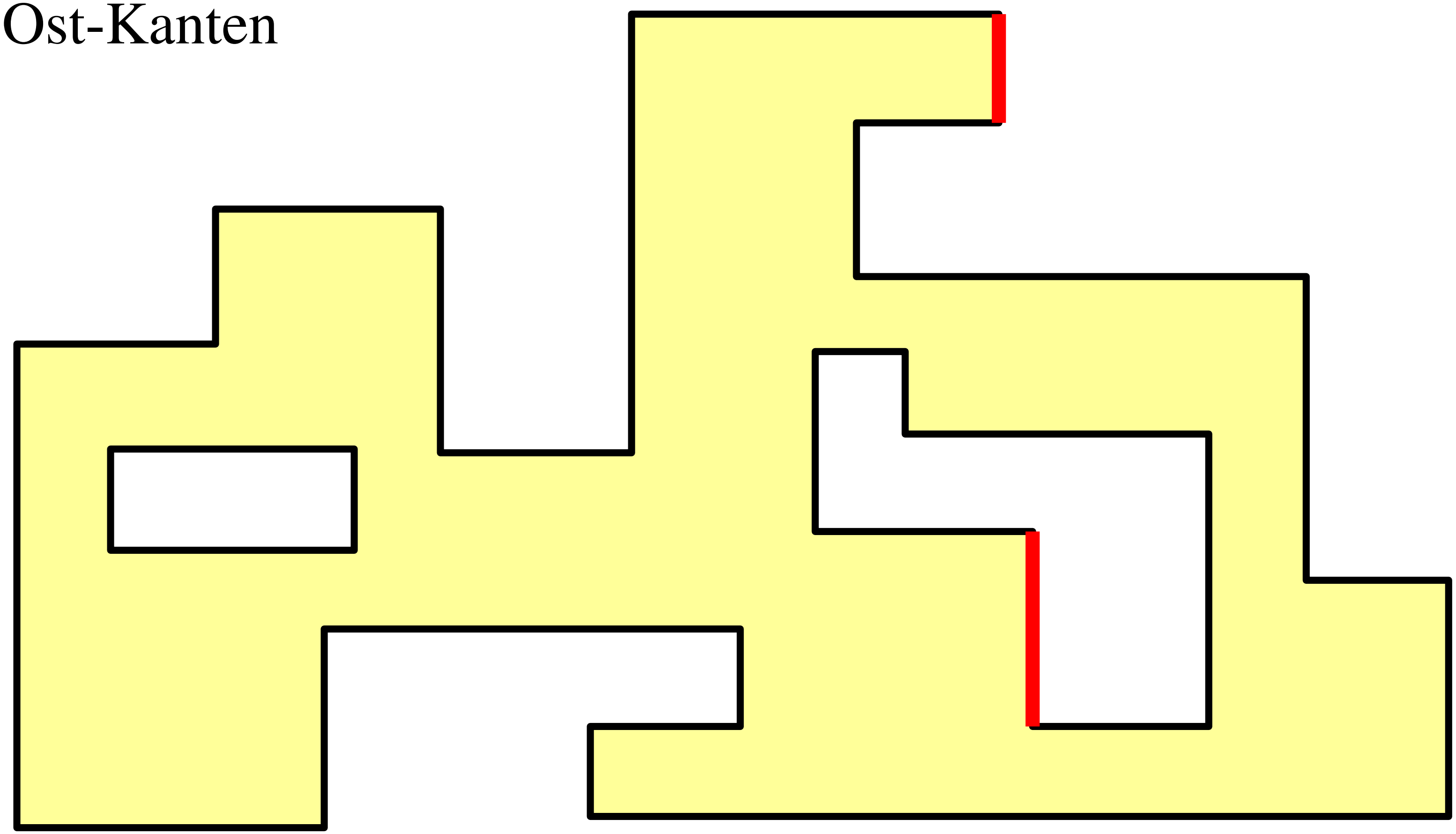
Möglichst sparsame Platzierung der Überwachungsgeräte
in einem gegeben Polygon.

Dafür führen wir zunächst einige Begriffe ein.

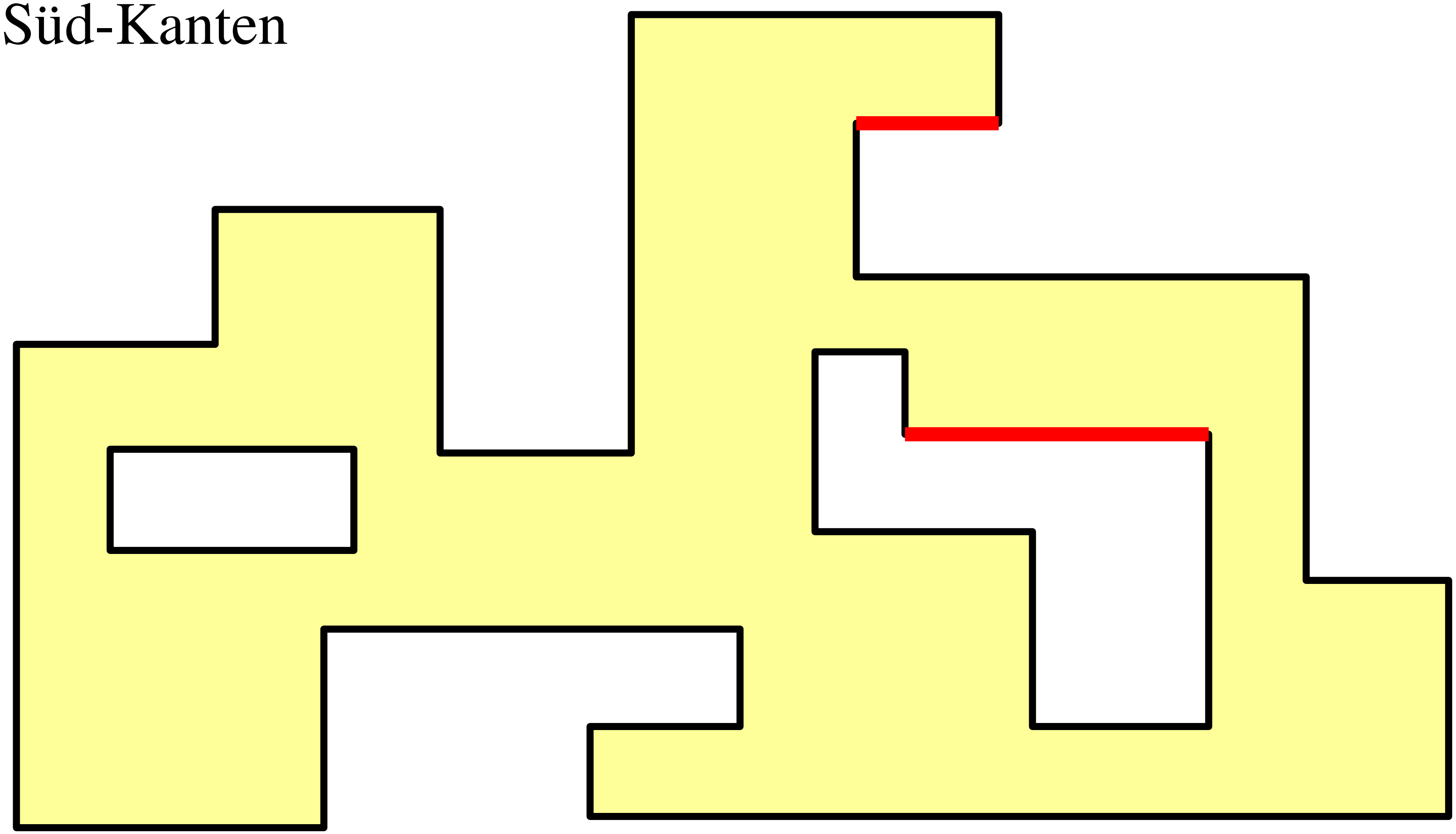
Nord-Kanten



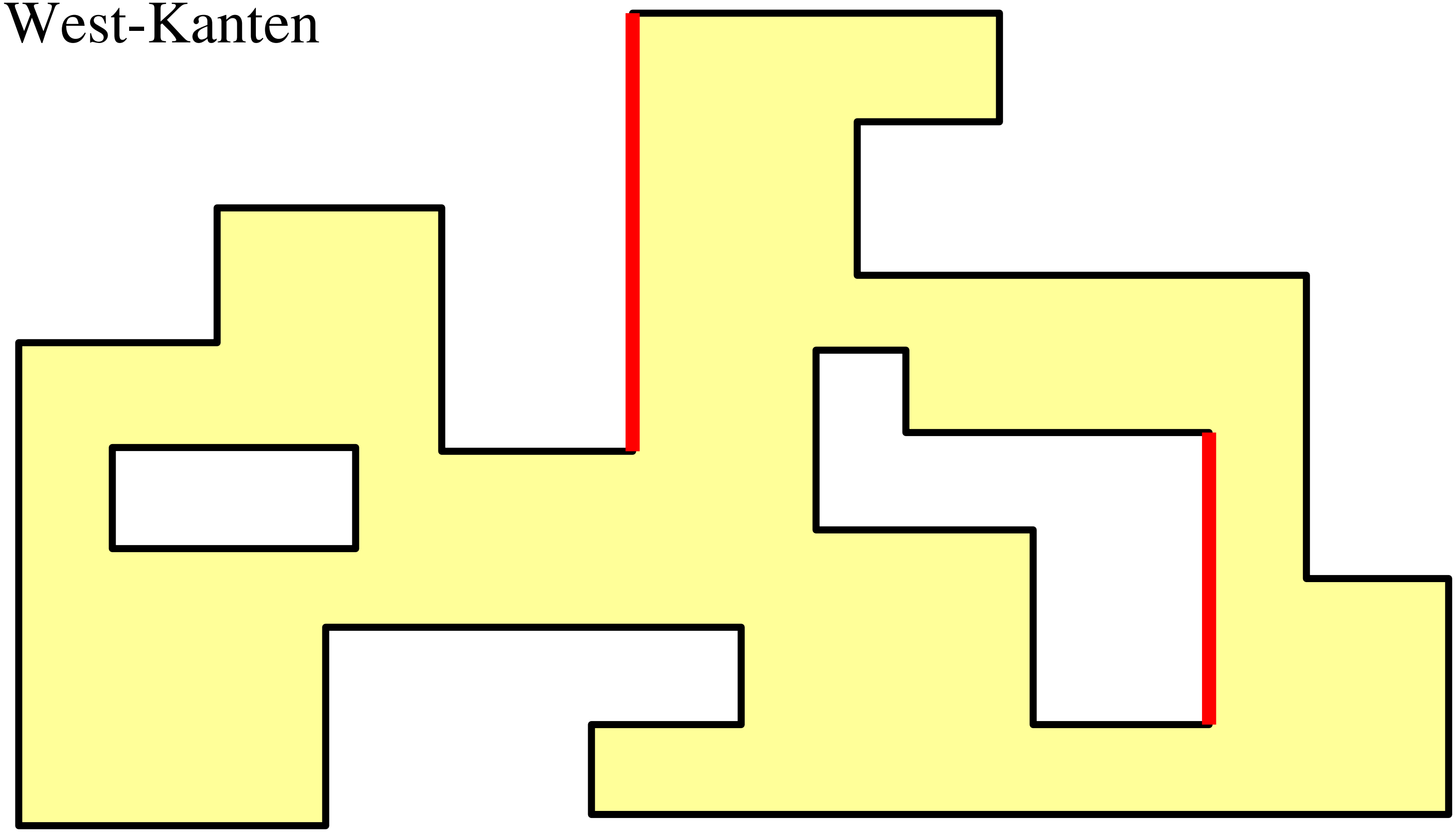
Ost-Kanten



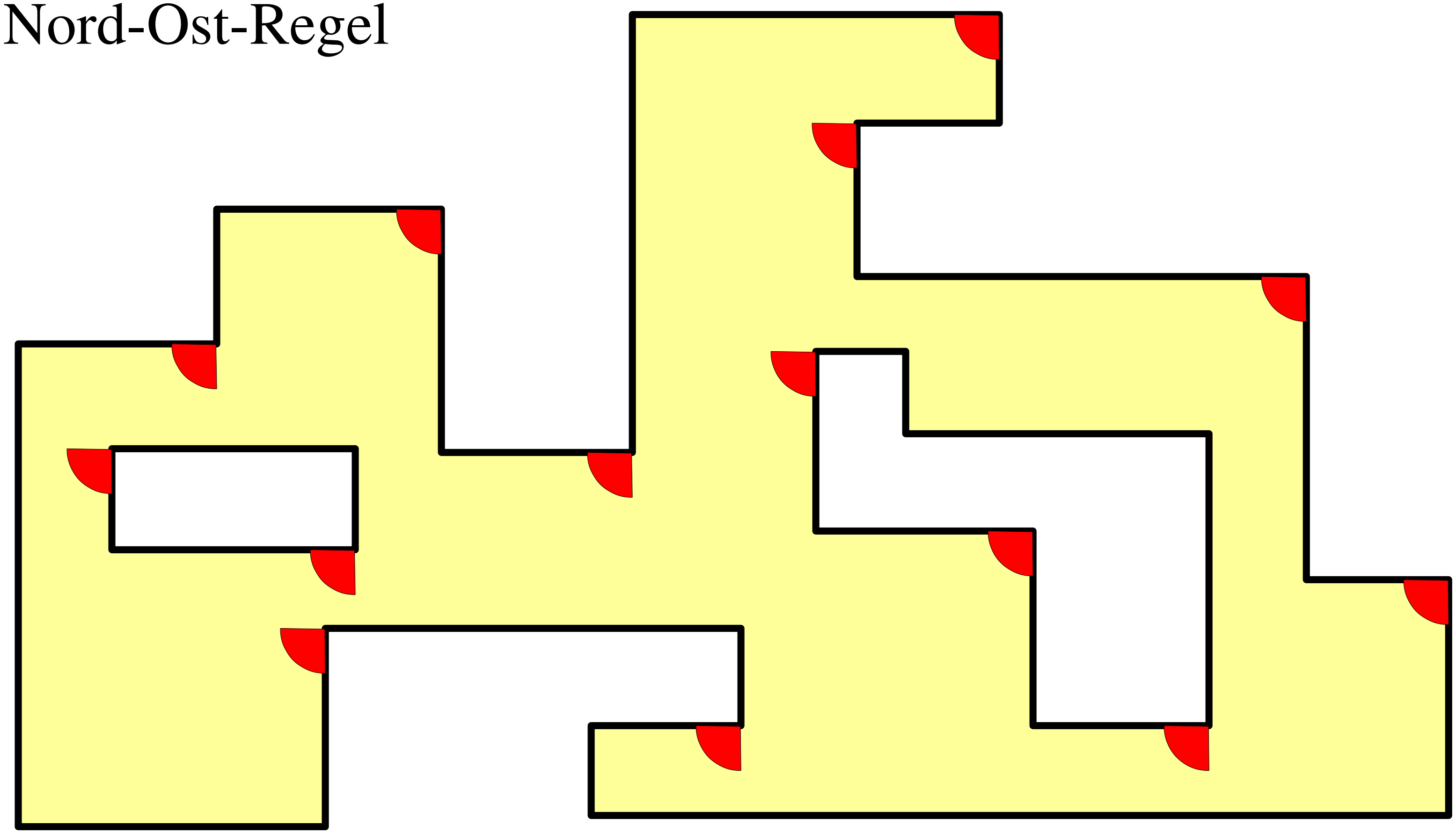
Süd-Kanten



West-Kanten



Nord-Ost-Regel



Analog gibt es: Süd-Ost-Regel

Süd-West-Regel

Nord-West-Regel

Lemma

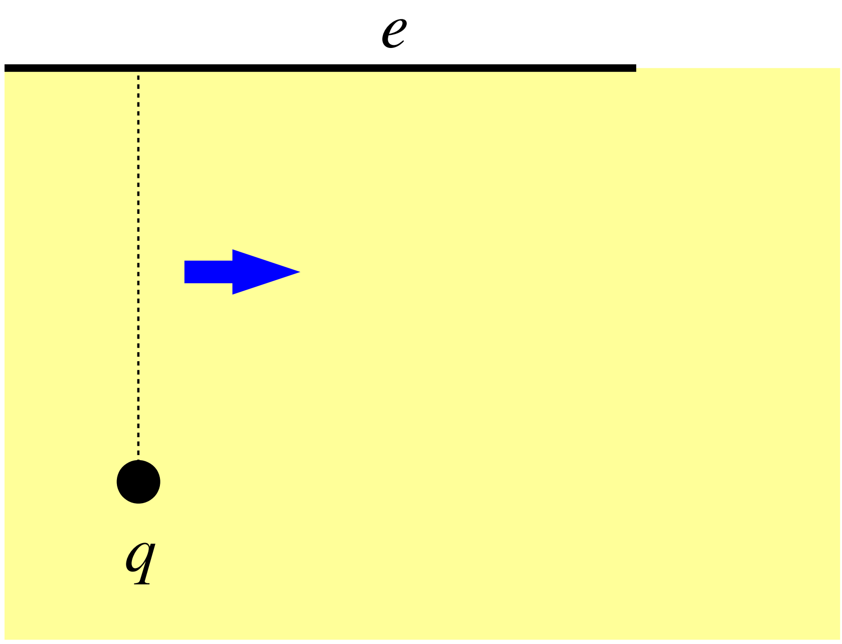
Wenn man in einem Orthopolygon Geräte gemäß der Nord-Ost-Regel platziert, dann wird das Polygon lückenlos überwacht.

Beweis:

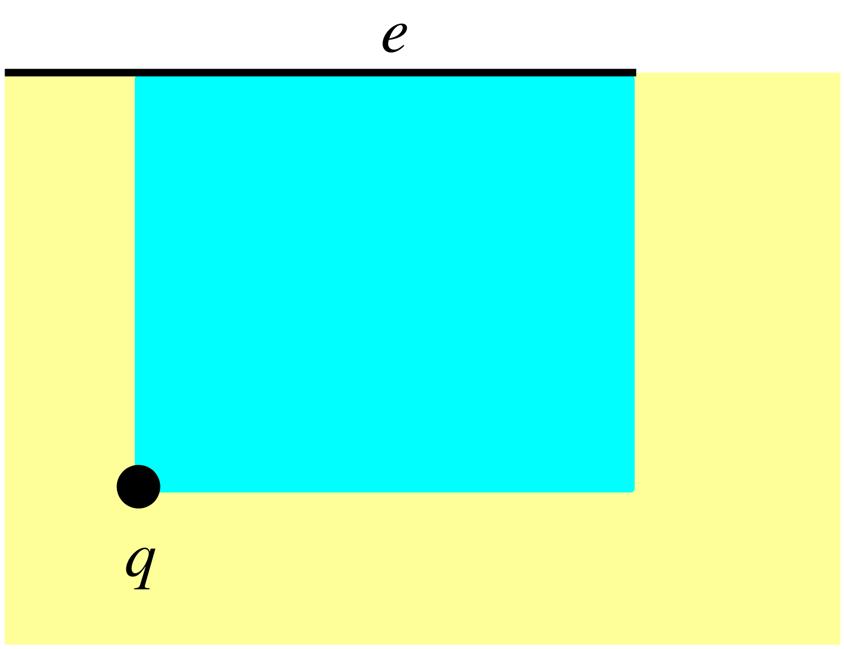
Betrachten wir einen beliebigen Punkt q des Orthopolygons.

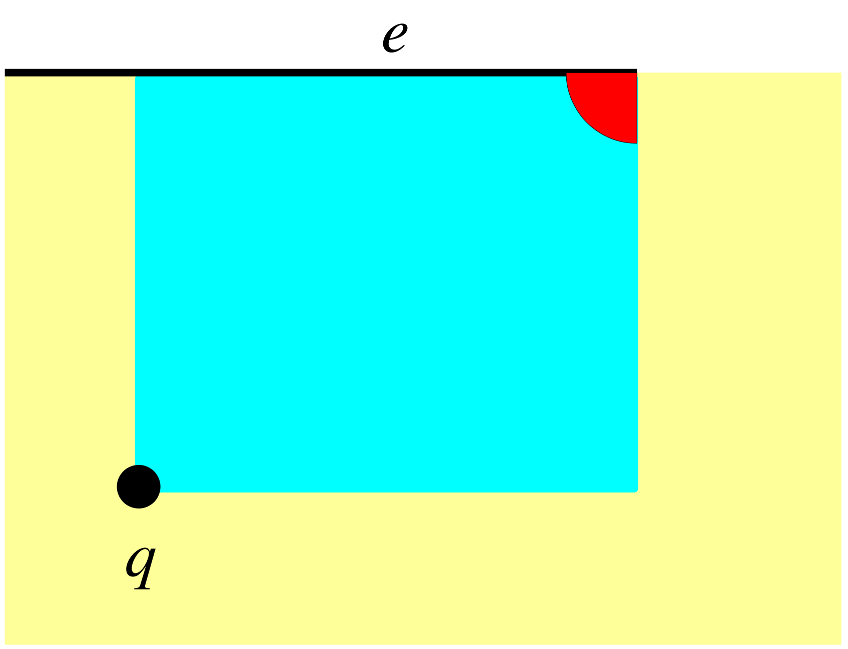
Sei e die Kante, die wir treffen, wenn wir von q aus nach Norden gehen.

Wir gehen entlang von e nach Osten und betrachten das von der gepunkteten Strecke überstrichene Rechteck.

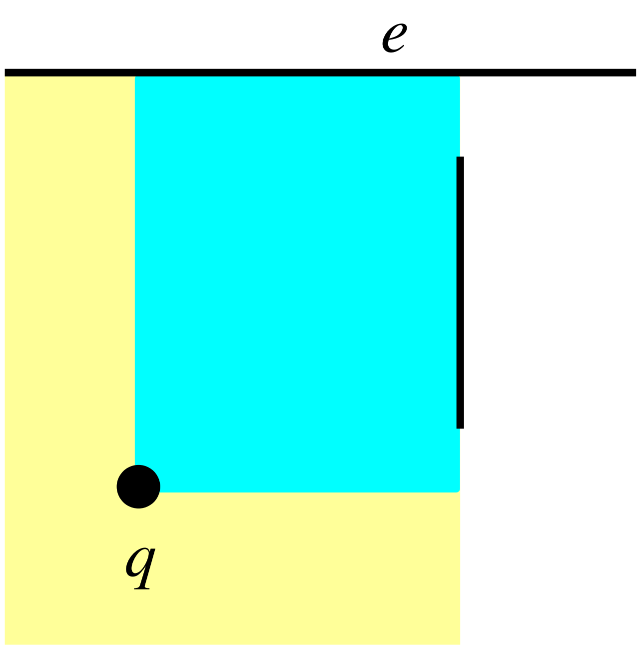


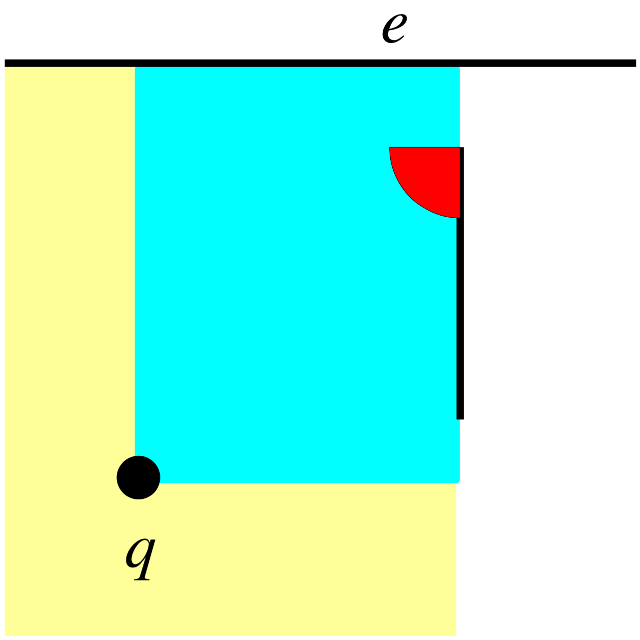
1. Fall: Wir erreichen den Endpunkt von e, ohne mit dem Rechteck an einer Ost-Kante anzustoßen.




e
q

2. Fall: Wir stoßen an einer Ost-Kante an.




e
q

6. Analyse der Anzahl aufgestellter Geräte

Bezeichnungen (1)

n_0	Anzahl der Ecken des Orthopolygons auf dem äußeren Rand
h	Anzahl der Löcher
c_0	Anzahl der konvexen Ecken (Innenwinkel $\frac{\pi}{2}$) auf dem äußeren Rand
r_0	Anzahl der reflexen Ecken (Innenwinkel $\frac{3\pi}{2}$) auf dem äußeren Rand

Bezeichnungen (2)

n_i Anzahl der Ecken auf dem Rand des i-ten Lochs

c_i Anzahl der konvexen Ecken auf dem Rand des i-ten Lochs

r_i Anzahl der reflexen Ecken auf dem Rand des i-ten Lochs

$$n = \sum_{i=0}^{h} n_i \qquad c = \sum_{i=0}^{h} c_i \qquad r = \sum_{i=0}^{h} r_i$$

Bezeichnungen

$|NO|$ Anzahl der Geräte, die durch die Nord-Ost-Regel platziert werden.

$|NO|_c$ Anzahl der Geräte, die durch die Nord-Ost-Regel auf konvexen Ecken platziert werden.

$|NO|_r$ Anzahl der Geräte, die durch die Nord-Ost-Regel auf reflexen Ecken platziert werden.

Wir benutzen analoge Bezeichnungen für die anderen Regeln.

Lemma:

Sei P ein Orthopolygon ohne Löcher. Dann gilt:

$$c = \frac{n+4}{2} \qquad r = \frac{n-4}{2}$$

Beweis:

Die Innenwinkelsumme in P beträgt: $(n-2)\pi$

Andererseits ergibt sich die Innenwinkelsumme auch aus: $c\,\frac{\pi}{2} + r\,\frac{3\pi}{2}$

Also: $$(n-2)\pi = c\,\frac{\pi}{2} + r\,\frac{3\pi}{2}$$

$$= (n-r)\,\frac{\pi}{2} + r\,\frac{3\pi}{2}$$

$$= n\,\frac{\pi}{2} + r\,\pi$$

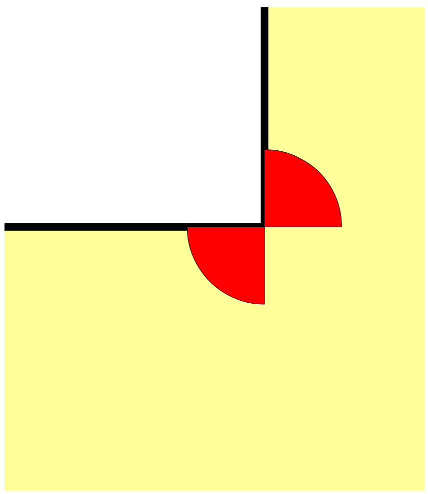
Koeffizientenvergleich ergibt: $r = \frac{n-4}{2}$ ■

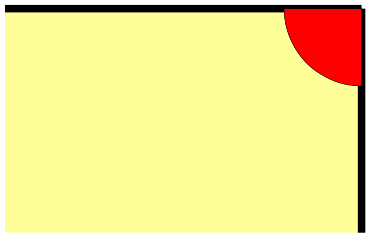
Lemma:

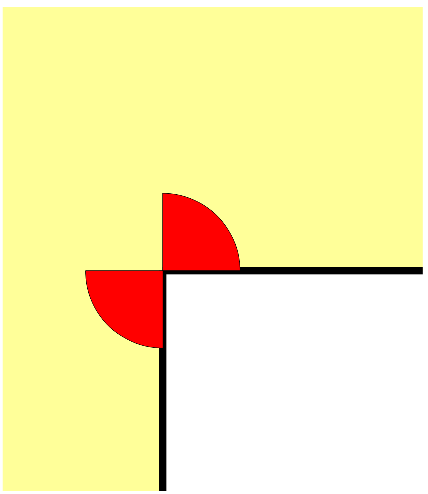
Sei P ein Orthopolygon mit n Ecken und h Löchern. Dann lässt sich P mit $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ Geräten lückenlos überwachen.

Beweis:

Wir versuchen, die von den vier verschiedenen Regeln platzierten Geräte zu zählen.







Ecke wird von NO- und SW-Regel besetzt.

Ecke wird nur von NO-Regel besetzt.

Ecke wird von NO- und SW-Regel besetzt.

Es gilt also: $|NO| = |SW|_r + |NO|_c$

Analog ergibt sich: $|SO| = |NW|_r + |SO|_c$

$$|SW| = |NO|_r + |SW|_c$$

$$|NW| = |SO|_r + |NW|_c$$

Aufsummieren: $|NO| + |SO| + |SW| + |NW| = 2r + c$

Nun gilt:

$$2r + c = 2\sum_{i=0}^{h} r_i + \sum_{i=0}^{h} c_i$$

$$= 2r_0 + 2\sum_{i=1}^{h} r_i + c_0 + \sum_{i=1}^{h} c_i$$

$$= (n_0 - 4) + \sum_{i=1}^{h} (n_i + 4) + \frac{n_0 + 4}{2} + \sum_{i=1}^{h} \frac{n_i - 4}{2}$$

$$= n + 4(h-1) + \frac{n}{2} - 2(h-1)$$

$$= \frac{3n + 4(h-1)}{2}$$

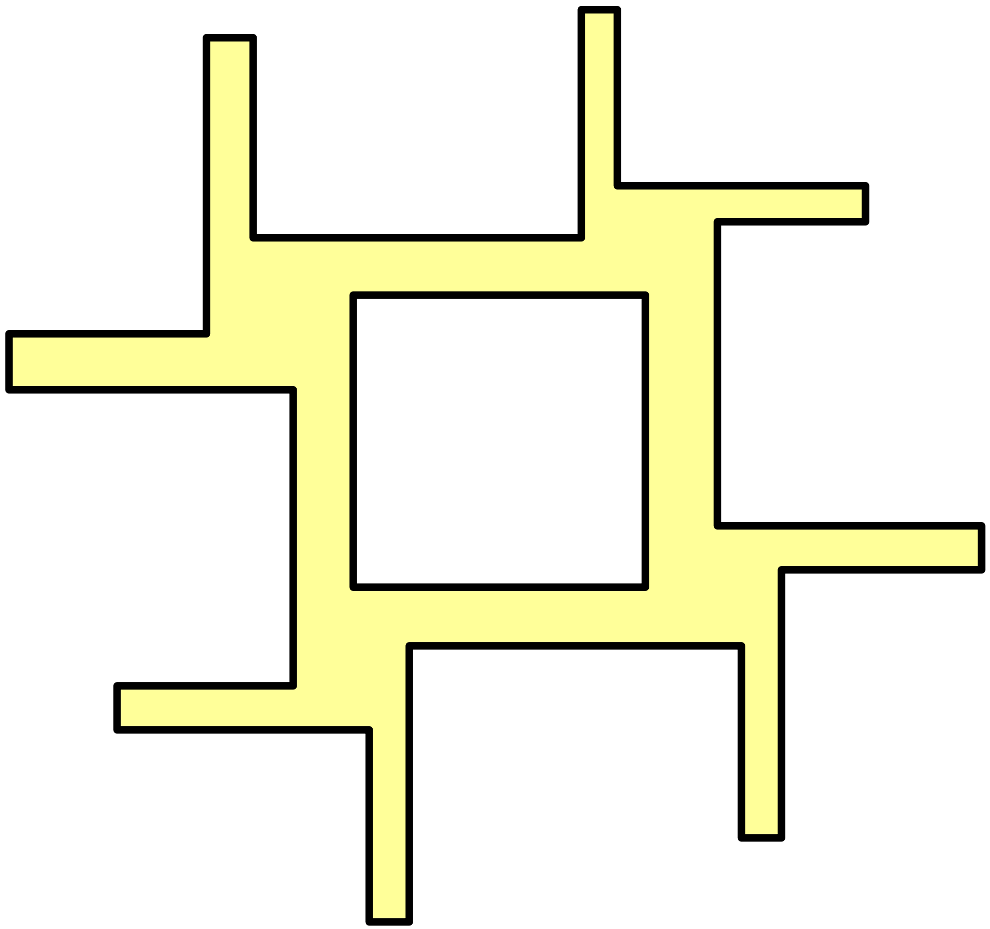
Obere Schranke

Somit: $$|NO|+|SO|+|SW|+|NW| = \frac{3n+4(h-1)}{2}$$

Also gibt es eine Regel, die höchstens $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$

Geräte platziert. ■

Geht es besser?

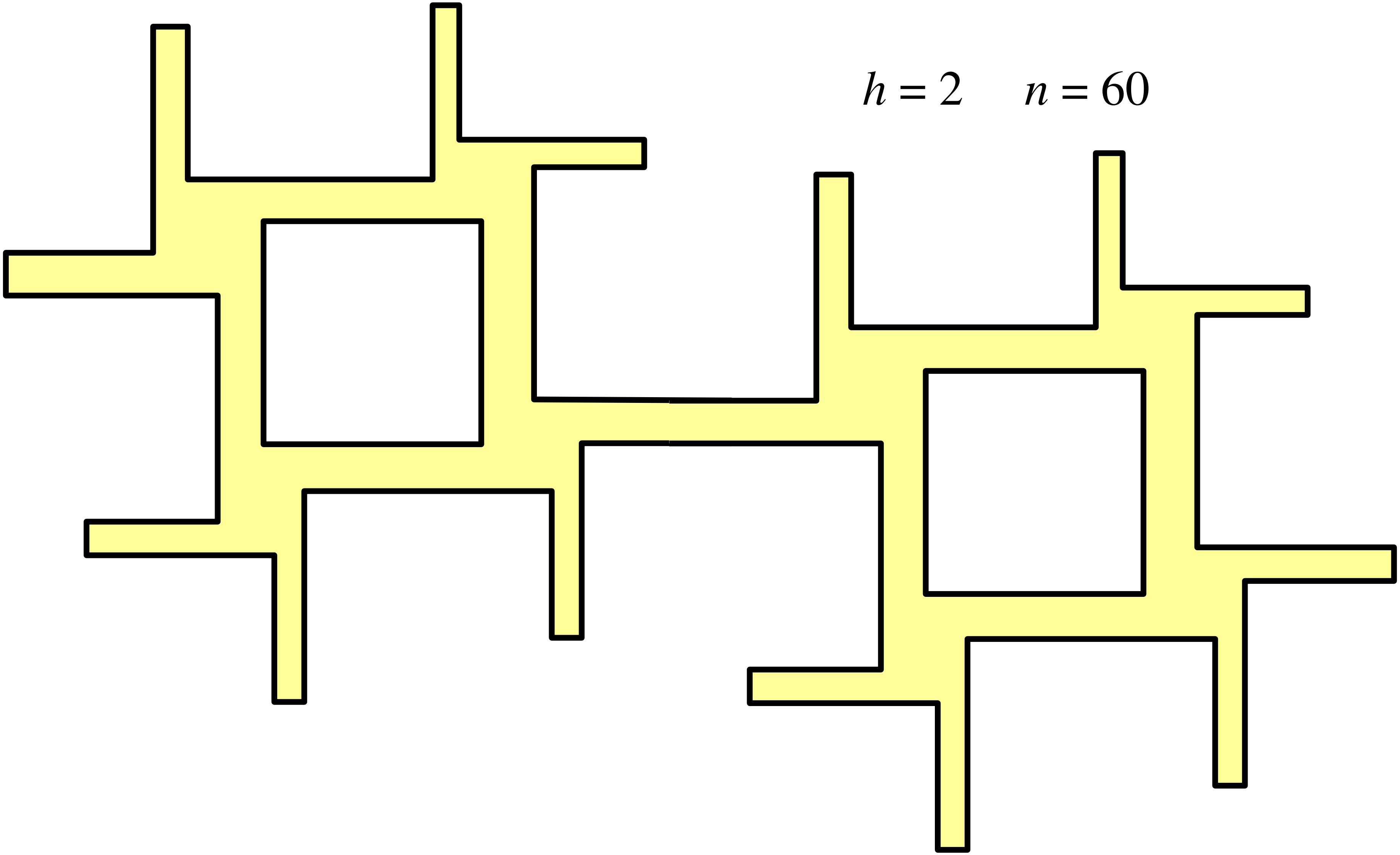


Wir benötigen mindestens 12 Kameras.

$h = 1 \qquad n = 32$

Wir benötigen mindestens 23 Kameras.

$h = 2 \qquad n = 60$



Zusammenfassung

In jedem Orthopolygon mit n Ecken und h Löchern lassen sich in O(n) Zeit $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ Geräte platzieren, die das Polygon lückenlos überwachen.

Für alle geraden natürlichen Zahlen $n > 2$ und alle dazu passenden natürlichen Zahlen h gibt es Orthopolygone mit n Ecken und h Löchern, zu deren Überwachung mindestens $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ Geräte benötigt werden.