

2. Aufgabenblatt Diskrete Mathematik SS 2019

1. Für die Menge der Geraden in der Ebene betrachten wir folgende beiden 2-stelligen Prädikate:

- $P(g, h)$...die Geraden g und h sind parallel
- $S(g, h)$...die Geraden g und h stehen senkrecht aufeinander

Was bedeuten die folgenden Aussagen? Sind die Aussagen wahr oder falsch?

- (a) $\forall g \forall h \forall f ((P(g, h) \wedge S(g, f)) \Rightarrow S(h, f))$
(b) $\forall g \forall h \exists f (P(g, h) \Rightarrow (S(g, f) \wedge S(h, f)))$
(c) $\exists g \forall h (S(g, h) \wedge \forall f (\neg S(g, f) \vee \neg S(h, f)))$

2. Für die Menge der natürlichen Zahlen betrachten wir die Prädikate:

- $P(n)$... n ist eine Primzahl
- $T(n, m)$... n ist ein Teiler von m

Wie kann man damit die folgenden Aussagen formal aufschreiben?

- (a) Für alle natürlichen Zahlen a , die größer als 1 sind, gibt es eine natürliche Zahl b , sodass b eine Primzahl ist und b ein Teiler von a ist.
(b) Für alle natürlichen Zahlen a gilt, dass, wenn a eine Primzahl ist, es außer 1 und a keine natürliche Zahl b gibt, die ein Teiler von a ist.

3. Es sei $U(n)$ ein einstelliges Prädikat und $V(n, m)$ ein zweistelliges Prädikat auf der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen. Ziehen Sie in den prädikatenlogischen Formeln die Negationen jeweils so weit wie möglich nach innen.

- (a) $\neg \forall x (U(x) \wedge (\exists y (((\neg V(x, y)) \vee U(y))))))$
(b) $\neg \exists x (\forall y (V(x, y) \Rightarrow (\exists z (V(z, y))))))$

4. Beweisen Sie die folgende Aussage und schreiben Sie die einzelnen Schritte des Beweises formal auf:

Für jede natürliche Zahl n gilt, dass, wenn n eine Quadratzahl ist, die durch eine Primzahl p teilbar ist, dann auch n durch p^2 teilbar ist.

5. Die Kontraposition zu einer Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist $((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$. Wie lautet die Kontraposition zu den folgenden Aussagen?

- (a) Wenn ein Polynom q für alle Primzahlen p den Wert $q(p) = 0$ annimmt, dann sind alle Koeffizienten von q gleich 0.
(b) Wenn für eine Menge M von Intervallen gilt, dass je zwei Intervalle aus M stets einen nicht leeren Durchschnitt haben, dann gibt es eine reelle Zahl, die in allen Intervallen aus M enthalten ist.
(c) Wenn ein Programm P als Eingabe gerade natürliche Zahlen verarbeiten kann und in Java geschrieben ist, dann benötigt P mindestens 1 TByte Arbeitsspeicher.