3. Aufgabenblatt Diskrete Mathematik
SS 2019

1. Wie kann man begründen, dass für alle endlichen Mengen A, B, C und D folgende Gleichung gilt?

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = &|A| + |B| + |C| + |D| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &- |A \cap B \cap C \cap D|\end{aligned}$$

2. Es sei $\mathcal{M}$ ein nicht leeres Mengensystem. Was bedeutet dann jeweils die Aussage? Ist die Aussage wahr oder falsch?

   (a) $\forall A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}((A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B)$
   (b) $\forall A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}\ \forall C \in \mathcal{M}(A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C)$
   (c) $\exists A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}(A \cap B = \emptyset)$
   (d) $\exists A \in \mathcal{M}\ \exists B \in \mathcal{M}\ \forall C \in \mathcal{M}(A \cup C = B \cup C)$

3. Wie kann man folgende Summenformeln für alle $n \in \mathbb{N}$ inhaltlich begründen?

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$

4. Es sei $\mathcal{R}$ das System derjenigen Teilmengen $F \subseteq \mathbb{R}^2$, für die F

   (i) eine rechteckige Fläche mit achsenparallelen Kanten ist und
   (ii) die Punkte $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(2, 0)$, $(1, 3)$ und $(2, 4)$ enthält.

   Welche Menge ergibt sich dann als $\bigcap \mathcal{R}$?

5. Sei $\mathcal{M}$ ein System von nicht leeren Teilmengen einer endlichen nicht leeren Menge A.

   (a) Wie kann man einsehen, dass man mit dem folgenden Programm eine Teilmenge $H \subseteq A$ findet, für die $H \cap T \neq \emptyset$ für alle $T \in \mathcal{M}$ ist?
      (1) Setze $H = \emptyset$.
      (2) Falls $\mathcal{M} = \emptyset$ ist, gib H aus und beende das Programm.
      (3) Wähle eine beliebige Teilmenge $T \in \mathcal{M}$.
      (4) Setze $H = H \cup T$.
      (5) Lösche alle Teilmengen T' aus $\mathcal{M}$, für die $T \cap T' \neq \emptyset$ ist.
      (6) Gehe zu (2).
   (b) Am liebsten möchte man eine Menge $H \subseteq A$ mit $H \cap T \neq \emptyset$ für alle $T \in \mathcal{M}$, die so klein wie möglich ist. Sei H_{opt} eine solche Menge. Angenommen alle Teilmengen in $\mathcal{M}$ enthalten höchstens vier Elemente. Wie kann man dann argumentieren, dass für die von dem Verfahren in (a) gefundene Menge H stets $|H| \leq 4 \cdot |H_{opt}|$ gilt?