9. Aufgabenblatt Diskrete Mathematik
SS 2019

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten und Variablen im Körper $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

2. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung mit Koeffizienten und einer Variablen im Körper $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot, 0, 1)$ an.

$$x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$$

3. Ein Polynom $q(x)$ vom Grad $n \geq 2$ mit Koeffizienten und Variablen in einem endlichen Körper heißt irreduzibel, wenn man es nicht als

$$q(x) = a(x) \cdot b(x)$$

mit zwei Polynomen $a(x)$ und $b(x)$ schreiben kann, deren Grad jeweils mindestens 1 und höchstens $n - 1$ ist. Prüfen Sie für die folgenden Polynome $q(x)$, ob diese irreduzibel im angegebenen endlichen Körper sind.

   (a) $q(x) = x^3 + x^2 + 2x + 5$ in $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot, 0, 1)$

   (b) $q(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot, 0, 1)$

4. Berechnen Sie jeweils den Ausdruck im angegebenen endlichen Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$.

   (a) $\langle (1, 2, 4, 3), (4, 2, 6, 5) \rangle$ in $K = \mathbb{Z}_7$

   (b) $(8, 7, 2) + (4, 3, 5)$ in $K = \mathbb{Z}_{13}$

   (c) $(2, 5, 3) - (5, 1, 7)$ in $K = \mathbb{Z}_{11}$

   (d) $2 \cdot (1, 2, 0, 1, 2) - (0, 1, 2, 1, 1)$ in $K = \mathbb{Z}_3$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $K = \mathbb{Z}_5$

5. Ist die Menge von Vektoren für den angegebenen endlichen Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ jeweils linear abhängig oder linear unabhängig?

   (a) $\{(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ für $K = \mathbb{Z}_2$

   (b) $\{(2, 3, 1), (3, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ für $K = \mathbb{Z}_5$

6. Was ist die Menge C_G der Codevektoren in $\mathbb{Z}_3^5$ für den linearen Codierer mit folgender Generatormatrix?

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Was ist die Kontrollmatrix H des linearen Codierers mit der kanonischen Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

für den endlichen Körper $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot, 0, 1)$?

8. Berechnen Sie, falls möglich, jeweils den Hammingabstand zwischen u und v sowie das Hamminggewicht von u.

   (a) $u = (0, 1, 0, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1, 0, 1)$

   (b) $u = (3, 4, 2, 1, 0)$, $v = (2, 4, 1, 2, 0)$

   (c) $u = (7, 0, 0, 1, 2)$, $v = (0, 0, 0, 3, 2, 3)$

9. Was ist die maximale Anzahl von Fehlern in Codevektoren aus $\mathbb{Z}_3^6$ des linearen Codierers mit der Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

die der Empfänger sicher korrigieren kann?