# 2. Einführung in die Mengenlehre

## 2.1. Kurze Wiederholung

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Menge zu beschreiben:

(i) Die Elemente der Menge aufzählen.

Bsp: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii) Ein Prädikat verwenden.

Bsp: $\mathbb{N}$, $P(n)$... "$n$ ist eine Primzahl"

$\{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$

Wir verwenden weiter die grundlegenden Mengenoperationen:

- Vereinigung: $A \cup B$
- Durchschnitt: $A \cap B$
- Mengendifferenz: $A \setminus B$

Eine Menge $M$ heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl $n$ gibt, sodass die Anzahl der Elemente in $M$ gleich $n$ ist. Wir schreiben dann $|M| = n$.
Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt unendlich.

## 2.2. Gleichmächtige Mengen

Zwei Mengen $M$ und $N$ heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \to N$ gibt. Wir schreiben dann $|M| = |N|$.

Lemma: Das offene Intervall $(0,1)$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Beweis: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \tan(\pi \cdot (x - \frac{1}{2}))$ ist eine bijektive Abbildung. (Betrachte den Graph von $f$.) ▨

**Lemma:** Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ und das offene Intervall $(0,1)$ sind gleichmächtig.

**Beweis:** Die Abbildung $f:[0,1] \to (0,1)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \text{ für } x = 0 \\ 1/_{n+2} & , \text{ für } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ x & , \text{ sonst} \end{cases}$$

ist bijektiv.

$f$

Zugehöriges Bild: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ ▨

**Lemma:** Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ und $\mathbb{N}$ sind nicht gleichmächtig.

**Beweis:** Angenommen es gäbe eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to [0,1]$.
Sei $0.d_0^{(n)} d_1^{(n)} d_2^{(n)} \ldots$ die Darstellung von $f(n)$ als Dezimalbruch.
Wir betrachten nun die Zahl $x \in [0,1]$, die durch den Dezimalbruch $0.b_0 b_1 b_2 \ldots$ mit

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } d_n^{(n)} \text{ ungerade ist,} \\ 1 & , \text{ falls } d_n^{(n)} \text{ gerade ist,} \end{cases}$$

dargestellt wird.
Dann gilt $f(n) \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. Somit muss unsere eingangs gemachte Annahme falsch sein und es gibt keine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to [0,1]$. ▨

**Bem.:** Von der Beweistechnik her handelt es sich um einen Widerspruchsbeweis. Die Konstruktion der Zahl $x$ bezeichnet man als Diagonalisierung.

**Folgerung:** Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind beide unendlich, aber sie sind nicht gleichmächtig.

Mengen, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind, heißen abzählbar. Mengen, die weder endlich noch abzählbar sind, heißen überabzählbar.

Bsp:
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar
- $\mathbb{C}$ ist überabzählbar

## 2.3. Die Potenzmenge einer Menge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge $M$ heißt die Potenzmenge von $M$ und wird mit $P(M)$ bezeichnet.

Bsp: $M = \{1,2\}$

$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Satz: Sei $M$ eine endliche Menge mit $|M| = n$. Dann ist $|P(M)| = 2^n$.

Beweis: Durch vollständige Induktion nach $n$.

Induktionsanfang (IA): $n = 0$

Dann ist $M = \emptyset$ und $P(M) = \{\emptyset\}$.

Prüfen der Behauptung: $|P(M)| = 1 = 2^0$ – okay

Induktionsschritt (IS): Schluss von $n = k$ auf $n = k+1$.

Wir gehen aus von folgender Annahme (Induktionsvoraussetzung (IV)):

Für alle Mengen $M$ mit $|M| = k$ gilt $|P(M)| = 2^k$.

Sei nun $N$ eine beliebige Menge mit $|N| = k+1$.

Wir wählen ein beliebiges Element $a \in N$. Dann gilt:

$$P(N) = \{T \subseteq N : T \text{ enthält } a\} \cup \{T \subseteq N : T \text{ enthält } a \text{ nicht}\}$$

keine Überschneidung!

Jetzt wenden wir die IV an:

- $|\{T \subseteq N : T \text{ enthält } a\}| = |\{T' \subseteq N \setminus \{a\}\}| \overset{IV}{=} 2^k$
- $|\{T \subseteq N : T \text{ enthält } a \text{ nicht}\}| = |\{T' \subseteq N \setminus \{a\}\}| \overset{IV}{=} 2^k$

Daraus folgt: $|\mathcal{P}(N)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ ▨

Für Mengen $M$ und $N$ schreiben wir $|M| \leq |N|$, wenn es eine injektive Abbildung $f: M \to N$ gibt. Wir schreiben $|M| < |N|$, wenn $|M| \leq |N|$ und $|M| \neq |N|$ gilt.

<u>Satz:</u> Für jede Menge $M$ gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

<u>Beweisidee:</u> Die Abbildung $f: M \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(x) = \{x\}$ ist injektiv. Somit gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ ist.

Für endliche Mengen $M$ mit $n$ Elementen wissen wir bereits:

$$|M| = n < 2^n = |\mathcal{P}(M)|$$

Allgemein kann man $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Man nimmt dazu an, es gäbe eine bijektive Abbildung $f: M \to \mathcal{P}(M)$. Dann betrachtet man die Menge

$$B = \{b \in M : b \notin f(b)\} \subseteq M.$$

Man überlegt sich dann, dass $B$ nicht zum Wertebereich von $f$ gehören kann – im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $f$ bijektiv ist. ▨

<u>Folgerung:</u> Es gibt beliebig "große" unendliche Mengen:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \ldots$$

## 2.4. Mengensysteme

Die Potenzmenge einer Menge ist ein Beispiel für ein Mengensystem, dh. einer Menge von Teilmengen einer vorgegebenen Menge.

Für ein nicht leeres Mengensystem $\mathcal{M}$ ist der Durchschnitt definiert als

$$\bigcap \mathcal{M} = \{ x : \forall B \in \mathcal{M} (x \in B) \}.$$

Analog ist für jedes Mengensystem $\mathcal{M}$ die Vereinigung definiert als

$$\bigcup \mathcal{M} = \{ x : \exists B \in \mathcal{M} (x \in B) \}.$$

Bsp: $\mathcal{M} = \{ \{1,2,3\}, \{1\}, \{1,4\} \}$

$\bigcap \mathcal{M} = \{1\}$

$\bigcup \mathcal{M} = \{1,2,3,4\}$

Bem: Für alle Mengen $M$ gilt:

- $\bigcup \mathcal{P}(M) = M$
- $\bigcap \mathcal{P}(M) = \emptyset$

Ein Mengensystem $Z$ heißt Zerlegung der Menge $A$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\bigcup Z = A$.

(ii) Für alle $M \in Z$ und alle $N \in Z$ mit $M \neq N$ ist $M \cap N = \emptyset$.

(iii) Für alle $M \in Z$ ist $M \neq \emptyset$.

Bsp: $Z = \{ \{1\}, \{2,4\}, \{3,5,6\} \}$ ist eine Zerlegung von $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Bem: Zerlegungen stehen in enger Beziehung zu sogenannten Äquivalenzrelationen (s. Kapitel 3).