3. Relationen

3.1. Grundbegriffe

Zur Erinnerung:

∘) $A \times B$ ... Menge der geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$, $b \in B$

∘) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ... Menge der geordneten k-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ mit $a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k$

Bsp: $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\Delta, O\}$

$$A \times B \times C = \{(1,a,\Delta), (1,a,O), (1,b,\Delta), (1,b,O), (2,a,\Delta), (2,a,O), (2,b,\Delta), (2,b,O)\}$$

Für Mengen A und B ist eine Relation von A nach B eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Statt $(a,b) \in R$ schreibt man oft aRb.

Bsp: A... Menge der Autos in Deutschland

B... Menge der Einwohner von Deutschland

$R_h = \{(a,b) \in A \times B : b \text{ ist Halter von } a\}$

$\mathrm{dom}(R) = \{a \in A : \exists b \in B\,(aRb)\}$ ... Definitionsbereich von R

$\mathrm{ran}(R) = \{b \in B : \exists a \in A\,(aRb)\}$ ... Wertebereich von R

Bsp: $\mathrm{dom}(R_h)$ ... Menge der Autos in D., deren Halter Einwohner von D. ist

$\mathrm{ran}(R_h)$ ... Menge der Einwohner von D., die Halter eines Autos in D. sind

$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : aRb\}$ ... zu R inverse Relation

Bsp: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$

$R = \{(1,a), (2,b), (3,b)\}$

$R^{-1} = \{(a,1), (b,2), (b,3)\}$

Bem: Tabellen in relationalen Datenbanken beschreiben Relationen

Halter	Wohnort
Müller	Leipzig
Meier	Halle

3.2. Darstellung von Relationen

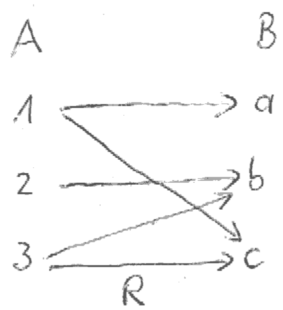
Wir betrachten als Bsp: $R = \{(1,a), (2,b), (3,b), (1,c), (3,c)\}$

Adjazenzmatrix $M_R \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit $n = |A|$, $m = |B|$, $R \subseteq A \times B$

$$\begin{array}{c c} & \xrightarrow{B} \\ & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ A\downarrow \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es gilt: $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$

Pfeildiagramm

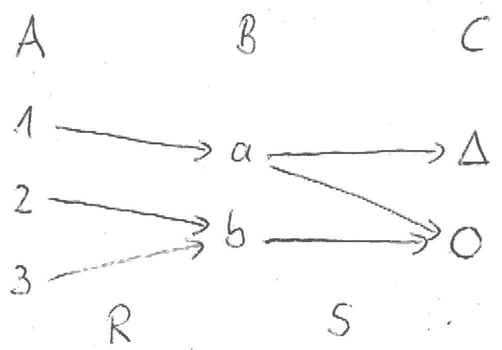


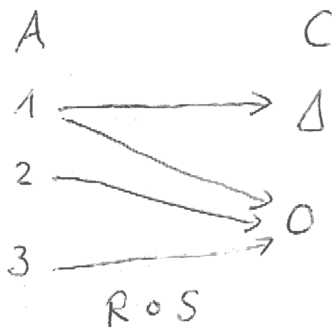
Mit Pfeildiagrammen lässt sich die Komposition von Relationen gut darstellen.

$R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

$R \circ S = \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S)\}$ ... Komposition von $R \circ S$

Bsp:



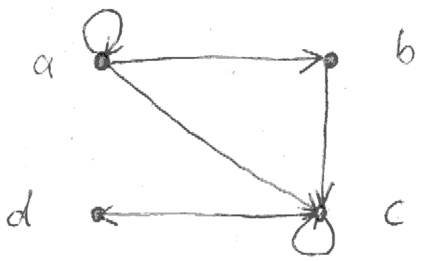


Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt homogen.

Darstellung als gerichteter Graph:

$M = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a), (c,c), (a,c), (a,b), (b,c), (c,d)\}$



3.3. Äquivalenzrelationen (ÄR)

$R \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(Ref) $\forall x \in M \; (x R x)$ ... Reflexivität

(Tr) $\forall x \in M \; \forall y \in M \; \forall z \in M \; ((x R y \wedge y R z) \Rightarrow (x R z))$ ... Transitivität

(Sym) $\forall x \in M \; \forall y \in M \; (x R y \Rightarrow y R x)$ ... Symmetrie

Bsp: ◦) "denselben Wohnort haben" ist eine ÄR auf der Menge der Einwohner von D.

◦) "gleichmächtig sein" ist eine ÄR auf jedem Mengensystem

◦) $\models\!\dashv$ ist eine ÄR auf der Menge der aussagenlogischen Formeln

Sei R eine ÄR und $x \in M$.

$\overline{x} = \{y \in M : y R x\}$ ... Äquivalenzklasse von x

Satz: Das Mengensystem $\overline{M}$ der Äquivalenzklassen einer ÄR R auf M ist stets eine Zerlegung von M.

Beweis: Wegen (Ref) gilt $x \in \overline{x}$. Somit ist $\overline{x} \neq \emptyset$.

Außerdem folgt: $\bigcup \overline{M} = M$

Seien $x, y \in M$ mit $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. Wähle $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$.

Dann gilt für alle $s \in \bar{x}$: $sRx \wedge xRz \wedge zRy$

Wegen (Tr) folgt daraus: sRy bzw. $s \in \bar{y}$

Es muss also gelten: $\bar{x} \subseteq \bar{y}$

Analog argumentiert man, dass $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ gelten muss.

Somit gilt $\bar{x} = \bar{y}$, womit alle Eigenschaften einer Zerlegung erfüllt sind. $\blacksquare$

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz: Sei Z eine Zerlegung der Menge M. Dann ist

$$R = \{(a,b) \in M \times M : \exists T \in Z \ (a \in T \wedge b \in T)\}$$ eine ÄR auf M.

[ohne Beweis]

3.4. Ordnungsrelationen

$R \subseteq M \times M$ heißt Halbordnungsrelation (HOR), wenn gilt:

(Ref) ...

(Tr) ...

(Anti) $\forall x \in M \ \forall y \in M \ ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$ ... Antisymmetrie

Das geordnete Paar (M, R) heißt dann halbgeordnete Menge.

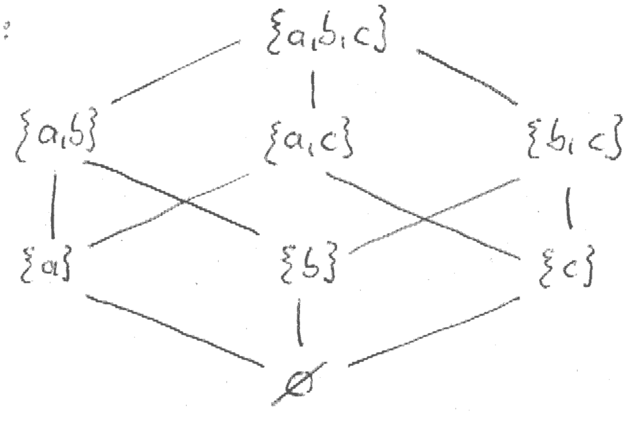
Bsp: •) $\subseteq$ ist eine HOR auf jedem Mengensystem

•) $| = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \ (m \cdot k = n)\}$ ist eine HOR auf $\mathbb{N}$

Es gilt: $2|6$, $3|12$, $\neg(4|15)$. $|$ ... "teilt"

Darstellung von HOR mit Hasse-Diagramm:

$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$



Striche bzw. Kanten nur bei direkter Teilmengenbeziehung zeichnen!

$R \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation, wenn gilt:

(a) R ist HOR

(b) $\forall x \in M \ \forall y \in M \ (x R y \lor y R x)$

Das Paar (M, R) heißt dann geordnete Menge.

Bsp: •) $(\mathbb{N}, \leq)$

•) $(A^*, \leq_{lex})$ mit A^* Menge der Zeichenketten aus Symbolen Δ und $\circ$.

$\leq_{lex}$ ... lexikographische Ordnung: $\Delta\Delta\circ\circ\Delta \leq_{lex} \Delta\circ\Delta$

Sei (M, R) eine halbgeordnete Menge.

(i) $x \in M$ minimales Element, wenn $\forall y \in M \ (y R x \Rightarrow x = y)$.

(ii) $x \in M$ maximales Element, wenn $\forall y \in M \ (x R y \Rightarrow x = y)$.

(iii) $x \in M$ kleinstes Element, wenn $\forall y \in M \ (x R y)$.

(iv) $x \in M$ größtes Element, wenn $\forall y \in M \ (y R x)$.

Bsp: •) $(\mathbb{N}, \leq)$: kleinstes Element ist 0, keine maximalen Elemente

•) $(\mathbb{N}, |)$: kleinstes Element ist 1, größtes Element ist 0

Merke: •) Jedes kleinste Element ist minimales Element.

•) Jedes größte Element ist maximales Element.

•) Wenn sie existieren, sind kleinste/größte Elemente eindeutig.

•) Jede endliche halbgeordnete Menge besitzt mindestens ein minimales und mindestens ein maximales Element.

Eine halbgeordnete Menge (M, R) heißt fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq M$ ein minimales Element x bzgl. R enthält, d.h. $\forall y \in A \ (y R x \Rightarrow x = y)$.

Bsp: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist fundiert. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist nicht fundiert.