4. Elementare Kombinatorik

4.1. Zählprinzipien

(i) Additionsprinzip

Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ endliche, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

Bsp: $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\{a, b, c, d, e, f\}| = 6 = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

(ii) Doppelte Abzählung

Sei M_R die Adjazenzmatrix einer endlichen Relation R.

z_i ... Summe der Einträge der i-ten Zeile von M_R, $1 \leq i \leq m$

s_j ... Summe der Einträge der j-ten Spalte von M_R, $1 \leq j \leq n$

Dann gilt:

$$|R| = \sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{j=1}^{n} s_j$$

Bsp: $R = \{(a, \Delta), (a, \square), (b, \square), (c, \bigcirc)\}$

$$M_R = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array} & \end{array}, \quad |R| = 4 = \boxed{\sum_{i=1}^{3} z_i} = \boxed{\sum_{j=1}^{3} s_j}$$

(iii) Multiplikationsprinzip

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$$

Bsp: $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{a\}$, $A_3 = \{\Delta, +\}$

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = |\{(1,a,\Delta), (1,a,+), (2,a,\Delta), (2,a,+)\}|$$
$$= 4 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 2 \cdot 1 \cdot 2$$

(iv) Schubfachprinzip

Seien A und B endliche nichtleere Mengen mit $|A| > |B|$. Dann gibt es zu jeder Abbildung $f: A \to B$ zwei Elemente $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ und $f(a_1) = f(a_2)$.

Bsp: In einem Laden gibt es 10 verschiedene Sorten Tee. An einem Tag kaufen 13 Kunden Tee. Dann müssen zwei Kunden dieselbe Teesorte gekauft haben.

(v) Inklusions-Exklusions-Prinzip

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{T \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\}) \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|T|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| \qquad \circledast$$

Bsp: $A_1 = \{a, b, e\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{a, c, d\}$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\{a,b,c,d,e\}| = 5$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 3 + 2 + 3 - 1 - 1 - 1 + 0$$

Begründung der Gleichung $\circledast$:

Sei x ein Element, das in $A_1, A_2, \dots, A_k$ vorkommt, aber nicht in $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ für ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Für jedes $T \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,k\}) \setminus \{\emptyset\}$ wird x genau ein Mal gezählt als Element der Menge $\bigcap_{i \in T} A_i$.

Das systematische Aufsummieren der Zählungen nach $l = |T|$ liefert:

$$\sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \cdot \binom{k}{l} = 1$$

Somit wird x auf der rechten Seite von ⊛ genau ein Mal gezählt.

<u>Folgerung:</u> Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ Teilmengen einer endlichen Menge B. Dann ist die Anzahl der Elemente in B, die zu keiner der Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ gehören, gleich

$$|B| - \sum_{T \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\}) \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|T|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| .$$

<u>Bsp:</u> Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 1000, die durch keine der Zahlen 2, 3 und 5 teilbar sind.

Für $k \in \{1,2,\dots,1000\}$ sei $A_k = \{ n \in \{1,2,\dots,1000\} : \exists m \in \mathbb{N} (n = k \cdot m) \}$

$A_1 = \{1,2,3,\dots,1000\}$

$A_2 = \{2,4,6,\dots,1000\}$

$A_3 = \{3,6,9,\dots,999\}$ usw. bis $A_{1000} = \{1000\}$

Es gilt $|A_k| = \left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor$ (mit $\lfloor 6.783 \rfloor = 6$).

Gesuchte Anzahl:

$1000 - |A_2| - |A_3| - |A_5| + |A_6| + |A_{10}| + |A_{15}| - |A_{30}|$

$= 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33$

$= 266$

4.2. Binomialkoeffizienten & Co.

(i) Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ bezeichnet $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Bsp: $M = \{a, b, c\}$, $n = |M| = 3$, $k = 2$

$$|\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}| = 3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!}$$

Alternative Sichtweisen:

- $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Bit-Strings der Länge n mit genau k Einsen.

  Bsp: $n = 3$, $k = 2$

  $$|\{110, 101, 011\}| = 3 = \binom{3}{2}$$

- $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse beim Ziehen von k Elementen aus einer Menge von n Elementen <u>ohne</u> Zurücklegen.

Beim k-maligen Ziehen <u>mit</u> Zurücklegen aus der Menge mit den Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ vermerken wir in einer Strichliste, wie oft die einzelnen Elemente gezogen wurden.

Bsp: $n = 4$, $k = 7$

$$|||| * || * * | \;\hat{=}\; 4 \text{ mal } a_1,\ 2 \text{ mal } a_2,\ 0 \text{ mal } a_3,\ 1 \text{ mal } a_4$$

Jedes mögliche Ergebnis einer Ziehung entspricht somit einem Bit-String der Länge $n + k - 1$ mit genau k Einsen: $\binom{n+k-1}{k}$

(ii) k-Permutationen

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet $(n)_k$ die Anzahl der geordneten k-Tupel mit Einträgen aus $\{1, 2, \dots, n\}$, von denen sich keiner wiederholt. Es gilt:

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Bsp: $n = 3, k = 2$

$$|\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}| = (3)_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

(iii) Multinomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_t$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = n$ bezeichnet $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t}$ die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente so auf t Schachteln $S_1, S_2, \ldots, S_t$ zu verteilen, dass S_i genau k_i Elemente enthält.

Bsp: $A = \{a, b, c, d\}$, $n = 4$, $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$

S_1	S_2	S_3
$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
$\{a,c\}$	$\{b\}$	$\{d\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Insgesamt gibt es 12 Möglichkeiten.

Allgemein gilt:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_t!}$$

(iv) Stirling-Zahlen (zweiter Art)

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichnet $S(n,k)$ die Anzahl der Zerlegungen einer n-elementigen Menge in k Teilmengen.

Bsp: $A = \{a, b, c\}$, $k = 2$

Zerlegungen: $\{\{a\},\{b,c\}\}$, $\{\{b\},\{a,c\}\}$, $\{\{c\},\{a,b\}\}$ $\rightsquigarrow$ $S(3,2) = 3$

Allgemein gilt:

- $S(n,1) = S(n,n) = 1$
- $S(n,k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$