Formelsammlung Maschinendynamik

Massenträgheitsmomente geometrischer Körper

Kugel

$$J_S = \frac{2}{5} m * r^2 \qquad J_A = \frac{7}{5} m * r^2$$

Quader (a*b*h, x-Achse verläuft parallel zur Kante a)

$$J_x = \frac{1}{12} m\left(b^2 + h^2\right)$$

dünner Stab

$$J_S = \frac{1}{12} m * l^2 \qquad J_A = \frac{1}{3} m * l^2$$

Vollzylinder

$$J_S = \frac{1}{2} m * r^2$$

$$J_S = \frac{1}{2} m * \left(r_a^2 + r_i^2\right) \qquad J_S \approx m * r_m^2$$

Hohlzylinder, Hohlzylinder mit geringer Wanddicke

Federsteifigkeit

Torsionsstab

$$c_T = \frac{0{,}385 * E * \pi * d^4}{l * 32}$$

Schraubenfeder

$$c = \frac{G * d^4}{8 * n * (D - d)^3}$$

G	Gleitmodul, Stahl = 83 GPa
d	Drahtdurchmesser
D	Außendurchmesser
n	Windungszahl

Eigenfrequenzen freier, linearer, ungedämpfter Schwinger (ϑ= 0)

Feder-Masse-Schwinger, Torsionsschwinger

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{c_T}{J}}$$

Mathematisches Pendel (für kleine Auslenkung, Punktmasse, masseloser Faden)

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Physikalisches Pendel (für kleine Auslenkung), Satz von Steiner

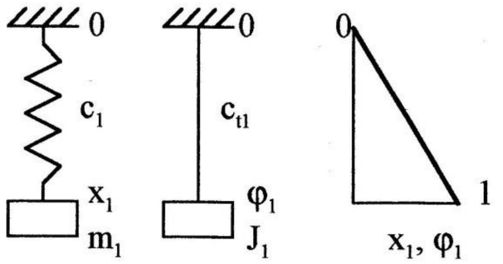
$$\omega = \sqrt{\frac{m * g * a}{J_A}} \qquad J_A = J_S + m * a^2 \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m * a^2}{m * g * a}}$$

Energieinhalt einer Sinusschwingung

$$W = \frac{c}{2} * y_{\max}^2 \qquad W = \frac{1}{2} m * \omega^2 * y_{\max}^2$$

<u>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen</u>

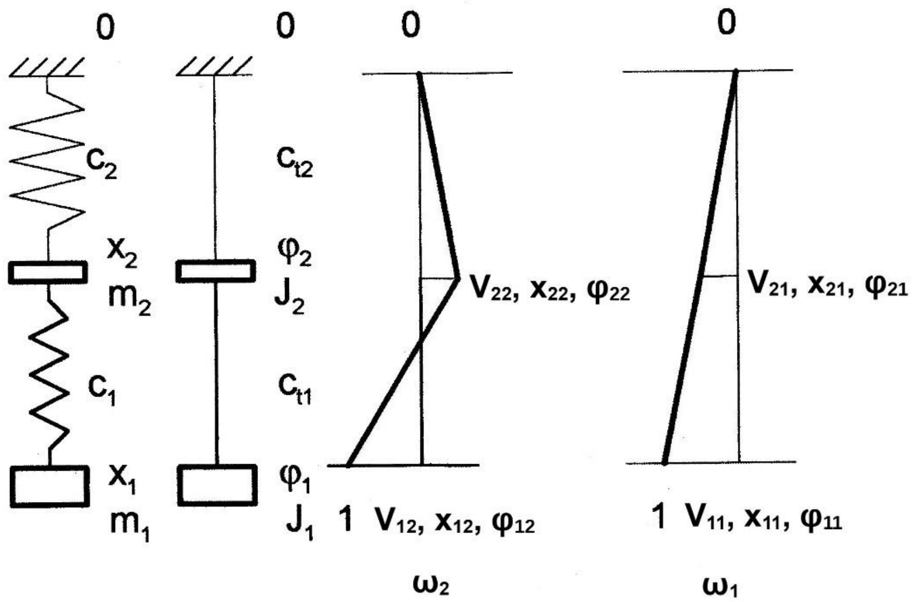
Einmassenschwinger



$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_t}{J}}, \quad x_1 = \varphi_1 = 1$$

[1]

gefesselter Zweimassenschwinger



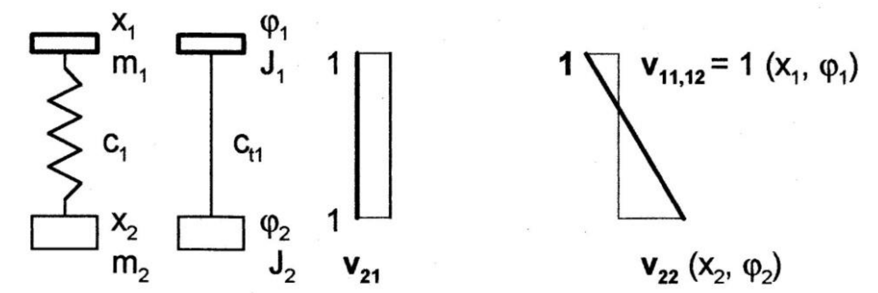
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{J_1c_1+J_1c_2+J_2c_1}{2J_1J_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{J_1c_1+J_1c_2+J_2c_1}{J_1J_2}\right)^2 - \frac{c_1c_2}{J_1J_2}}$$

$$v_{21} = 1 - \omega_1^2\frac{J_1}{c_1}$$

$$v_{22} = 1 - \omega_2^2\frac{J_1}{c_1}$$

[1] korrigiert

ungefesselter Zweimassenschwinger



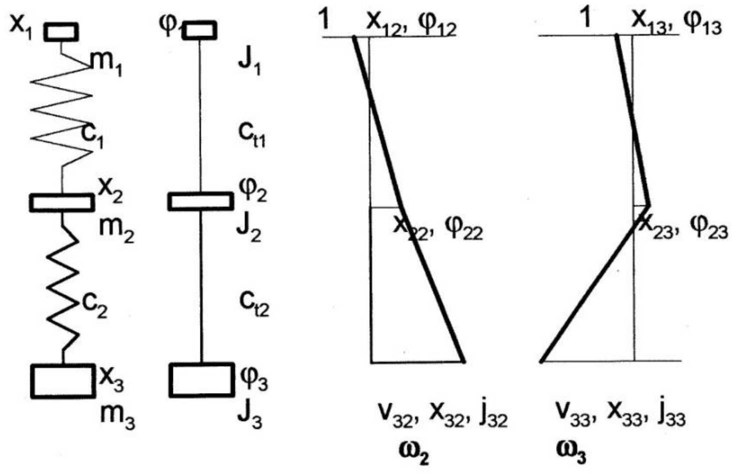
$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{c_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} = \sqrt{c_{t1} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}$$

$$v_{21} = 1 - \omega_1^2 m_1 / c_1 = 1 - \omega_1^2 J_1 / c_{t1} = 1$$

$$v_{22} = 1 - \omega_2^2 m_1 / c_1 = 1 - \omega_2^2 J_1 / c_{t1}$$

[1]

ungefesselter Dreimassenschwinger



$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}}$$

$$A = c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} \qquad B = c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3}$$

für ω_2:

$$v_{22} = 1 - \omega_2^2 J_1 / c_1$$

$$v_{32} = \frac{c_2}{c_1} \quad \frac{c_1 - \omega_2^2 J_1}{c_2 - \omega_2^2 J_3}$$

für ω_3:

$$v_{23} = 1 - \omega_3^2 J_1 / c_1$$

$$v_{33} = \frac{c_2}{c_1} \quad \frac{c_1 - \omega_3^2 J_1}{c_2 - \omega_3^2 J_3}$$

[1]

Freie, gedämpfte, periodische Schwingungen ($0 < \vartheta < 1$ bzw. $0 < \delta < \omega_0$)

Abklingkonstante

$$\delta = \frac{b}{2m} \qquad \delta = \frac{b}{2J} \qquad \delta = \frac{\lambda}{T_d}$$

b: Dämpfungskoeffizient

Gedämpfte und ungedämpfte Eigenfrequenz

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \qquad \frac{\omega_d^2}{\omega_0^2} + \vartheta^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_d^2 = \varpi_0^2 * \left(1 - \theta^2\right)$$

Logarithmisches Dekrement

$$\lambda = \delta * T_d \qquad \lambda = \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + n * T_d)}\right) \qquad \lambda = \frac{2 * \delta * \pi}{\varpi_d} \qquad \lambda = \frac{2 * \pi * \vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}$$

Dämpfungsgrad definiert und aus log. Dekrement

$$2\vartheta = \frac{b}{\sqrt{cm}} \qquad \vartheta = \frac{\delta}{\varpi_0} \qquad \vartheta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2 + \lambda^2}}$$

Freie, gedämpfte Bewegung (aperiodischer Fall ($\vartheta > 1$, $\delta > \omega_0$)

Weg-Zeit-Funktion

$$s = \frac{1}{2 * \chi} \left\{\left[s_0 * \left(\delta + \chi\right) + v_0\right] * e^{-(\delta - x) * t} + \left[s_0 * \left(\chi - \delta\right) - v_0\right] * e^{-(\delta + \chi) * t}\right\}$$

$$\left(s = Weg, \quad \chi = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad s_0 = Ausgangslage, \quad v_0 = Anfangsgeschwindigkeit, \quad t = Zeit\right)$$

Erzwungene Schwingung

Dämpfungsgrad aus dem Amplitudenverhältnis in der Vergrößerungsfunktion V_2 bei Resonanz

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{4 * \left(\frac{x^2}{s_0^2} - 1\right)}}$$

Dämpfungsgrad aus Halbwertsbreite und aus Frequenzverschiebung

$$\vartheta = \frac{\Delta\omega}{2 * \varpi_0} \qquad \vartheta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega_0}\right)^2}$$

Dämpfungsgrad im Vergleich zum Verlustwinkel/Verlustfaktor bei Elastomeren (nur für kleine Winkel)

$$\vartheta = \frac{\tan(\delta)}{2}$$

Vergrößerungsfunktionen (Übertragungsfunktionen)

	maximale Beschleunigung	Amplitude der stationären Schwingung	Vergrößerungsfunktion	Zeitfunktion und Phasenverschiebung
Krafterregung $F = F_0 \sin \Omega t$ **Bild 1**	$\frac{F_0}{m}$	$V_1 \quad \frac{F_0}{c}$	$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}}$ **Bild 5**	$\sin(\Omega t - \varphi)$ $\tan\varphi = \frac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2}$ **Bild 9**
Federfußpunkterregung $F = c_2 s_0 \sin \Omega t$ **Bild 2**	$\frac{c_2 s_0}{m}$	$V_1 \quad \frac{s_0 \, c_2}{c_1 + c_2}$		
Unwuchterregung $F = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t$ **Bild 3**	$\frac{m_u \, r_u}{m + m_u}\Omega^2$	$V_3 \quad \frac{m_u r_u}{m + m_u}$	$V_3 = \eta^2 V_1$ **Bild 6**	
Stützenerregung *relativ* $F = m \, s_0 \, \Omega^2 \sin \Omega t$ **Bild 4**	$s_0\Omega^2$	$V_3 \quad s_0$		
Stützenerregung *absolut* $F = s_0 (c^2 + b^2\Omega^2)^{1/2} \sin(\Omega t + \varphi)$ **Bild 4**	$s_0\omega^2\sqrt{1+4\vartheta^2\eta^2}$	$V_2 \quad s_0$	$V_2 = \frac{\sqrt{1+4\vartheta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}}$ **Bild 7**	$\sin(\Omega t + \varphi^*)$ $\tan\varphi^* = \frac{2\vartheta\eta^3}{1-\eta^2(1-4\vartheta^2)}$ **Bild 10**
		Amplitude der Kraft auf den Boden		
Krafterregung $F = F_0 \sin \Omega t$ **Bild 1**	$\frac{F_0}{m}$	$V_2 \quad F_0$		
Unwuchterregung $F = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t$ **Bild 3**	$\frac{m_u r_u}{m + m_u}\Omega^2$	$V_4 \quad c\frac{m_u r_u}{m + m_u}$	$V_4 = \eta^2 V_2$ **Bild 8**	

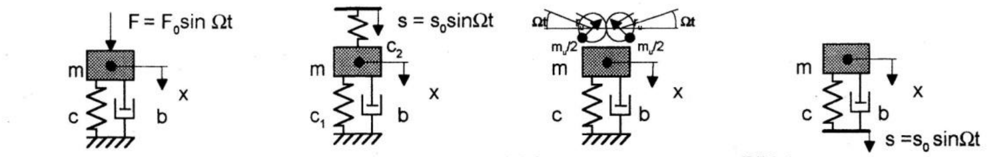


Bild 1 **Bild 2** **Bild 3** **Bild 4**

[2]

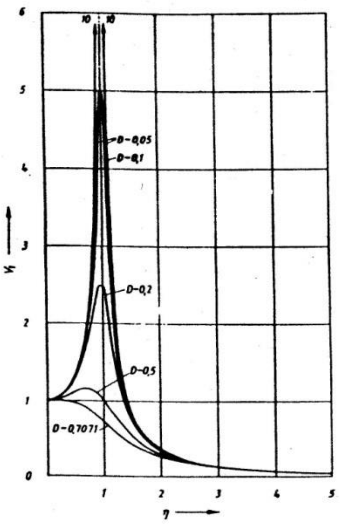


Bild 5
Vergrößerungsfunktion V_1

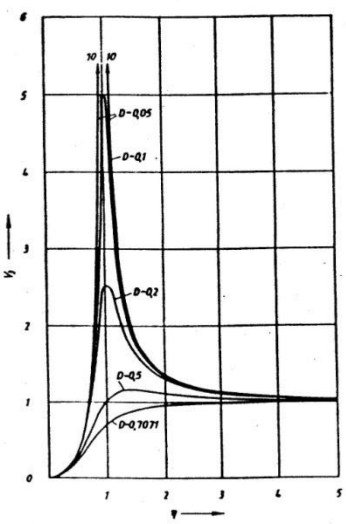


Bild 6
Vergrößerungsfunktion V_3

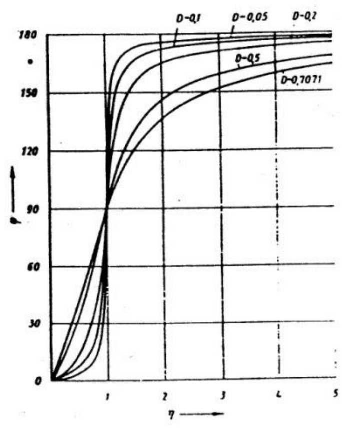


Bild 9
Phasenwinkel φ

[2]

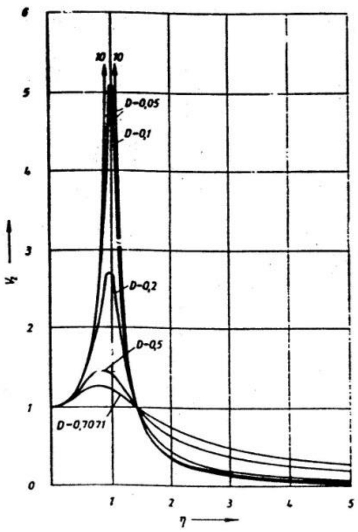


Bild 7
Vergrößerungsfunktion V_2

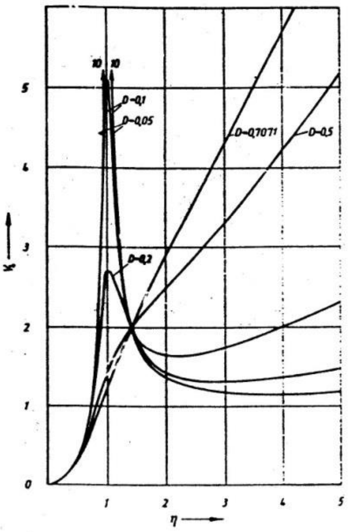


Bild 8
Vergrößerungsfunktion V_4

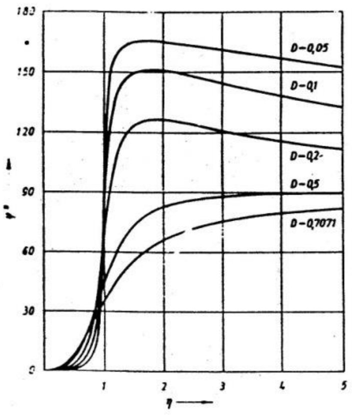


Bild 10
Phasenwinkel $\varphi *$

[2]

Bildquellen
[1] Herkunft ist leider nicht mehr nachvollziehbar, Hinweise zur Originalquelle sind willkommen
[2] Herkunft ist nicht genau nachvollziehbar, weitestgehend identisch mit: Göldner, Holzweißig, Leitfaden der Technischen Mechanik, ab 5. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig ab 1976